есть функционал (обобщенная функция) $F \in S'$. В самом деле, ведь

$$|(F\varphi)| \leqslant \int |F(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant C \int \frac{1+|x|^l}{1+|x|^{l+2}} \varkappa(l+2, 0, \varphi)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \varkappa(l+2, 0, \varphi),$$

откуда видно, что функционал (2) определен для всех $\varphi \in S$ и непрерывен. Линейность его очевидна.

Равенство (2) определяет функционал $F \in S'$ также в случаях, когда функция $F(x) \in L'_p$ (или L_p), $1 \leqslant p < \infty$. Если $F(x) \in \in L'$, то непрерывность (F, φ) следует из неравенств $|(F, \varphi)| \leqslant \leqslant \int |F(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \int |F(x)|\,\varkappa(0, 0, \varphi)\,dx \leqslant C\varkappa(0, 0, \varphi)$, а если $F(x) \in L'_p$ $(1 < p < \infty)$, то из неравенств

$$|(F, \varphi)| \leqslant \int |F(x)\varphi(x)| \leqslant \int |F(x)| \frac{1}{1+|x|} \varkappa(1, 0, \varphi)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int |F|^p dx\right)^{1/p} \left(\int \frac{dx}{(1+|x|)^q}\right)^{1/q} \varkappa(1, 0, \varphi) = C\varkappa(1, 0, \varphi) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Важно отметить, что *для того чтобы две локально интегрируемые (в римановом смысле) функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ представляли при помощи равенств вида* (2) *равные обобщенные функции $F_1 = F_2 \subset S'$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $F_1(x) = F_2(x)$ во всех точках непрерывности $F_1(x)$* и *$F_2(x)$.*

Достаточность условия очевидна. Оно также необходимо, потому что если имеет место равенство

$$\int F_1(x)\varphi(x)\,dx = \int F_2(x)\varphi(x)\,dx \text{ для всех } \varphi \in S, \tag{3}$$

и при этом допустить, например, что в некоторой точке x_0 непрерывности функций F_1 и F_2 имеет место

$$\psi(x_0) = F_1(x_0) - F_2(x_0) > 0,$$

то найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором

$$\psi(x) > \eta > 0.$$

Но существует неотрицательная функция $\varphi \in S$ с носителем на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (например, функция $\psi((x - x_0)/\delta)$ в упражнении 2 § 16.6). Для нее имеет место

$$(F_1, \varphi) - (F_2, \varphi) = \int \psi(x)\varphi(x)\,dx > \eta \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx > 0,$$

и мы пришли к противоречию с (3).

Более общее утверждение (см. § 19.6, теорема 1) гласит: *две локально интегрируемые в лебеговом смысле функции, если представляют, то один и тот же линейный функционал тогда и только тогда, когда на любом конечном отрезке $[a, b]$ они равны между собой, за исключением множества лебеговой меры нуль.*

Обобщенную функцию, представляемую при помощи интеграла (2) обычной локально интегрируемой функцией $F(x)$, отождествляют с этой последней. Например, $\sin x$, $(\sin x)/x$, e^{-x^2}, $\ln|x|$, $\sum_0^n a_k x$, — это обычные функции, но и обобщенные, принадлежащие S'.

С другой стороны, функция e^{x^2} не принадлежит S' (не представляет при помощи интеграла (2) линейный функционал на (S)), потому что для нее, например, не существует интеграл (2) при $\varphi(x) = e^{-x^2} \in S$.

Пример 1. Функционал

$$\delta = (\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad (\varphi \in S) \tag{4}$$

называется *δ-функцией (дельта-функцией)*. Очевидно, $\delta \in S'$, ведь

$$|\varphi(0)| \leqslant \sup_x |\varphi(x)| = \varkappa(0, 0, \varphi).$$

Не существует локально интегрируемой функции, которая представляла бы δ-функцию. В этом смысле δ есть подлинная (не обычная) обобщенная функция.

В самом деле, допустим вопреки утверждению, что такая локально интегрируемая функция $F(x)$ существует, и пусть $x_0 \neq 0$ есть ее точка непрерывности, где $F(x_0) > 0$. Тогда на некотором не содержащем нуль интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнялось бы неравенство $F(x) > \eta > 0$ и можно было бы подобрать неотрицательную функцию $\varphi \in S$ с носителем $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, откуда

$$(F, \varphi) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F(x)\,\varphi(x)\,dx > \eta \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx > 0.$$

Но этого не может быть, потому что для функции φ с носителем, не содержащим точку 0, функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0) = 0$. Итак, наша функция $F(x)$ не может быть положительной в ее точках непрерывности, отличных от нулевой.

Аналогично доказывается, что $F(x)$ не может быть отрицательной в таких точках, и тогда, очевидно,

$$\int F(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \text{ для всех } \varphi \in S.$$

Но это невозможно, ведь имеются же функции $\varphi \in S$, для которых $\varphi(0) \neq 0$.

Можно доказать более общее утверждение: *функционал* (4) *не представляется в виде интеграла* (2), *где $F(x)$ — какая-либо локально интегрируемая в лебеговом смысле функция.*

Однако функционал (δ, φ) можно записать в виде *интеграла Стилтьеса* *)

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\theta(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \varphi(x)\, d\theta(x),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

— функция, которую еще называют *функцией Хевисайда*.

По определению

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\theta(x) = \lim_{\max(x_j - x_{j-1}) \to 0} \sum_1^N \varphi(\xi_j)\,[\theta(x_j) - \theta(x_{j-1})],$$

где отрезок $[a, b]$ разделен на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и $x_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant x_j$ $(j = 1, \ldots, N)$. Очевидно, если нулевая точка $x = 0$ принадлежит отрезку $[x_{l-1}, x_l]$ и не является его правым концом, то

$$\sum_1^N \varphi(\xi_j)\,[\theta(x_j) - \theta(x_{j-1})] = \varphi(\xi_l)\,[\theta(x_l) - \theta(x_{l-1})] =$$
$$= \varphi(\xi_l) \to \varphi(0) \quad (\max|x_j - x_{j-1}| \to 0).$$

Если же точка 0 есть правый конец $[x_{l-1}, x_l]$, то наша сумма равняется $\varphi(\xi_{l+1}) \to \varphi(0)$, что дает тот же результат.

Пример 2. Обобщенная функция $\mathrm{P}.\,\frac{1}{x}$ определяется как предел

$$\left(\mathrm{P}.\,\frac{1}{x}, \varphi\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right\} = \mathrm{V.\,P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \quad (\varphi \in S), \tag{5}$$

т. е. интеграл справа в (5) понимается в смысле главного значения (V. P.— vales principal — главное значение). В обычном римановом (и лебеговом) смысле этот интеграл в случае, если $\varphi(0) \neq 0$, не существует. С другой стороны, предел (5) можно записать в виде обычного риманового (несобственного) интеграла $(\varphi(x) - \varphi(-x) = O(x),\ x \to 0)$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right\} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$$

*) Т. И. Стилтьес (1856—1894) — голландский математик.

Ясно, что этот функционал линейный. Непрерывность же его вытекает из неравенства

$$\left|\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{\int_{-x}^{x}\varphi'(t)\,dt}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x[\varphi(x)-\varphi(-x)]}{x^2}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{2x\varkappa(0,1,\varphi)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{2\varkappa(1,0,\varphi)}{x^2}\,dx < C\,[\varkappa(0,1,\varphi)+\varkappa(1,0,\varphi)].$$

Введем ряд важных операций над обобщенными функциями.

Если $\lambda=\lambda(x)$ есть *бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста, то произведение ее на обобщенную функцию $F\in S'$ записывается в виде $\lambda F=\lambda(x)F(x)$ и определяется при помощи равенства*

$$(\lambda F,\ \varphi)=(F,\ \lambda\varphi). \tag{6}$$

Это определение корректно, ведь $\lambda\varphi$ есть операция, непрерывная относительно $\varphi\in S$, а $(F,\ \lambda\varphi)$ есть функционал, непрерывный относительно $\lambda\varphi$, следовательно, и относительно φ. Линейность $(F,\ \lambda\varphi)$ по φ очевидна.

Это определение также естественно, потому что, если функционал $F\in S'$ представляется локально интегрируемой функцией $F(x)$, то функция $\lambda(x)F(x)$ тоже, очевидно, представляет функционал $\lambda F\in S'$ и

$$(\lambda F,\varphi)=\int \lambda(x)\,F(x)\,\varphi(x)\,dx=\int F(x)\,\lambda(x)\,\varphi(x)\,dx=(F,\lambda\varphi).$$

Производная от обобщенной функции $F\in S'$ по определению есть обобщенная функция F', определяемая равенством

$$(F',\ \varphi)=-(F,\ \varphi')\quad(\varphi\in S). \tag{7}$$

Так как $\varphi'\in S$ и есть непрерывная относительно φ операция и так как $(F,\ \varphi')$ есть непрерывный функционал относительно φ', то $(F',\ \varphi)$ есть непрерывный функционал относительно φ. Линейность его очевидна.

Определение (7) естественно, потому что, если, например, функция $F(x)$ непрерывна вместе со своей производной и $F,\ F'\in L'$, то

$$(F',\varphi)=\int F'(x)\,\varphi(x)\,dx=F(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int F(x)\,\varphi'(x)\,dx=$$

$$=-(F,\varphi').$$

Ведь $F(x),\ \varphi(x)\to 0\ (x\to\infty)$, так как, например,

$$F(x')-F(x)=\int_x^{x'} F'(t)\,dt\to 0\quad(x,\ x'\to\infty)$$

и существует $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$, который не может быть отличным от нуля, потому что $F \in L'$.

Очевидно, что любая обобщенная функция $F \in S'$ имеет производную (обобщенную) какого угодно порядка, определяемую по индукции $F^{(k)} = (F^{(k-1)})'$. Таким образом,

$$(F^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (F, \varphi^{(k)}).$$

Например,

$$\left(\delta^{(k)}, \varphi\right) = (-1)^k \left(\delta, \varphi^k\right) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt = \varphi(0),$$

т. е. $\theta' = \delta$.

По определению последовательность обобщенных функций $F_N \in S'$ $(N = 1, 2, \ldots)$ сходится к функции $F \in S'$ $(F_N \to F(S'))$, если *)

$$\lim_{N\to\infty} (F_N, \varphi) = (F, \varphi) \quad \text{для всех } \varphi \in S. \tag{8}$$

Отсюда автоматически следует также, что последовательность производных F_N' сходится к производной F', потому что

$$\left(F_N', \varphi\right) = -(F_N, \varphi') \to -(F, \varphi') = (F', \varphi), \quad N \to \infty.$$

Можно рассматривать *ряд*

$$F = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{9}$$

функций $u_k \in S'$, имеющий своей *суммой функцию* $F \in S'$, что надо понимать в том смысле, что

$$\sum_1^N u_k \to F(S'), \quad N \to \infty.$$

Из сказанного, очевидно, следует, что ряд (9) можно почленно дифференцировать:

$$F' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots$$

Пример 3. Рассмотрим обычную функцию

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & x \notin (0, \varepsilon), \end{cases}$$

зависящую от параметра $\varepsilon > 0$. Она есть в то же время и обобщенная функция f_ε.

*) Можно доказать, что если последовательность функций $F_N \in S'$ такова, что для любой $\varphi \in S$ последовательность чисел (F_N, φ) удовлетворяет условию Коши, то существует, и притом единственная, функция $F \in S'$, для которой выполняется (8).

Очевидно,

$$(f_\varepsilon, \varphi) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \varphi(x)\,dx \to \varphi(0), \quad \varepsilon \to 0 \quad (\text{для всех } \varphi \in S),$$

откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = \delta \quad (S').$$

Преобразованием (соответственно обратным преобразованием) Фурье обобщенной функции $F \in S'$ называется обобщенная функция $\widetilde{F}(\widehat{F})$, определяемая равенством

$$(\widetilde{F}, \varphi) = (F, \widetilde{\varphi}) \quad ((\widehat{F}, \varphi) = (F, \widehat{\varphi})) \quad (\varphi \in S). \tag{10}$$

Это определение корректно: $\widetilde{\varphi} \in S$ и непрерывно зависит от φ, а $(F, \widetilde{\varphi})$ непрерывно зависит от φ, поэтому и от φ; линейность $(F, \widetilde{\varphi})$ по φ очевидна. Оно естественно, так как согласуется, например, с равенством $(\widetilde{\varphi}, \psi) = (\varphi, \widetilde{\psi})$ для $\varphi, \psi \in S$. Далее, $\widehat{\widetilde{F}} = F$, так как $(\widehat{\widetilde{F}}, \varphi) = (\widetilde{F}, \widehat{\varphi}) = (F, \widetilde{\widehat{\varphi}}) = (F, \varphi)$.

Преобразование $\widetilde{F}(\widehat{F})$ *непрерывно зависит от* $F \in S'$. Это значит, что если последовательность $F_N \in S'$ сходится к $F \in S'$ $(F_N \to F(S'))$, то и $\widetilde{F}_N$ сходится к $\widetilde{F}$ $(\widetilde{F}_N \to \widetilde{F}(S'))$. В самом деле,

$$(\widetilde{F}_N, \varphi) = (F_N, \widetilde{\varphi}) \to (F, \widetilde{\varphi}) = (\widetilde{F}, \varphi), \quad N \to \infty.$$

Отметим еще, что *преобразование* $\widetilde{F}(\widehat{F})$ *отображает* S' *на* S' *взаимно однозначно*. То, что имеет место отображение S' в S', мы уже знаем, но если $\Phi \in S'$ — произвольная обобщенная функция, то ее можно представить в виде $\Phi = \widetilde{\widehat{\Phi}}$, что доказывает, что на самом деле наше преобразование отображает S' на S'. Наконец, если $F_1, F_2 \in S'$ и $\widetilde{F}_1 = \widetilde{F}_2$, то $\widetilde{F_1 - F_2} = 0$, $F_1 - F_2 = \widehat{0} = 0$ и $F_1 = F_2$, что показывает взаимную однозначность отображения.

Из (10) следует

$$F' = \widehat{ix\widetilde{F}} = \widetilde{-ix\widehat{F}}, \tag{11}$$

потому что, например (см. § 16.6, (6)),

$$(\widetilde{-ix\widehat{F}}, \varphi) = (-ix\widehat{F}, \widetilde{\varphi}) = (\widehat{F}, -ix\widetilde{\varphi}) = (F, \widehat{-ix\widetilde{\varphi}}) = \\ = -(F, \varphi') = (F', \varphi).$$

Из (11) легко следует по индукции общая формула для производной k-го порядка

$$F^{(k)} = \widehat{(ix)^k\widetilde{F}} = \widetilde{(-ix)^k\widehat{F}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Если $K \in S'$ есть обобщенная функция, преобразование $\widehat{K}$ которой есть обычная функция и притом бесконечно дифференцируемая полиномиального роста, то корректно определяется свертка K с произвольной функцией $F \in S'$ при помощи равенства

$$K * F = \widehat{\widetilde{K}\widetilde{F}} = \overset{\smile}{\widehat{K}\widehat{F}}. \tag{13}$$

Это определение пересекается с введенным в предыдущем параграфе определением свертки.

Пример 4. $\widetilde{\delta} = \widehat{\delta} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, потому что, например,

$$(\widetilde{\delta}, \varphi) = (\delta, \widetilde{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\delta^{(k)} = \overset{\smile}{(-ix)^k \widehat{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overset{\smile}{(-ix)^k 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overset{\smile}{(-ix)^k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

поэтому

$$F^{(k)} = \overset{\smile}{(-ix)^k \widehat{F}} = \sqrt{2\pi}\, \overset{\smile}{\widehat{\delta^{(k)}} \widehat{F}} = \sqrt{2\pi}\, (\delta^{(k)} * F).$$

Пример 5. Имеем (пояснения ниже)

$$(\widehat{\operatorname{sign} x}, \varphi) = (\operatorname{sign} x, \widehat{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \operatorname{sign} u\, du \int e^{iut} \varphi(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty du \int \varphi(t) \left(e^{iut} - e^{-iut}\right) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \lim_{N \to \infty} \int \varphi(t)\, dt \int_0^N \sin ut\, du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \lim_{N \to \infty} \int \varphi(t) \frac{1 - \cos Nt}{t}\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \lim_{N \to \infty} \int_0^\infty [\varphi(t) - \varphi(-t)] \frac{1 - \cos Nt}{t}\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \int_0^\infty \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i\, \mathrm{V.\,P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\, dt, \tag{14}$$

и мы получили формулу

$$\widehat{\operatorname{sign} x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i\, \mathrm{V.\,P.} \frac{1}{t}. \tag{15}$$

Функция $\operatorname{sign} x$ — локально интегрируемая и ограниченная и, следовательно, принадлежит S', поэтому имеет смысл первый член цепи (14), а вместе с ним второй и третий. При переходе к пятому члену изменен порядок интегрирования (при конечном N, см. § 13.15). При переходе к предпоследнему члену заметим, что

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}\cos Nt\,dt=0,$$

потому что гладкая функция $(\varphi(t)-\varphi(-t))/t\in L'(0,\infty)$. Последний член записан в виде сингулярного интеграла в смысле главного значения.

Отметим еще, что если $F(x)\in S'$ и $a\neq 0$ — действительное число, то обобщенные функции $F(a-x)$ и $F(ax)$ определяются при помощи равенств

$$(F(a-x),\ \varphi(x))=(F(x),\ \varphi(a-x)),\ (F(ax),\ \varphi(x))=\\ =|a|^{-1}(F(x),\ \varphi(x/a)).$$

Корректность этих определений следует из того, что операция перехода от $\varphi(x)\in S$ к $\varphi(x-a)$ или $\varphi(x/a)$ непрерывна в смысле (S), а естественность легко выясняется на обычных локально интегрируемых функциях $F(x)$, являющихся в то же время обобщенными.

Упражнения. Доказать, что

1. $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin Nx}{x}\xrightarrow[N\to\infty]{}\delta(x)\quad(S)$. 2. $\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\varepsilon^2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\delta(x)\quad(S)$.

Указание. Интеграл $\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx$ представить в виде суммы I_1+I_2 интегралов по областям $|x|<1$ и $|x|>1$. В первом интеграле положить $\varphi(x)=\varphi(0)+\psi(x)$ и учесть, что $|\psi(x)|\leqslant c|x|$, во втором учесть, что $\varphi(x)$ ограничена ($|\varphi(x)|\leqslant M$).

3. $\dfrac{1}{x\pm i\varepsilon}\to\mp i\pi\delta(x)+\mathrm{P.}\dfrac{1}{x},\quad \varepsilon\to 0(S)$.

Указание. $\left(\mathrm{P.}\dfrac{1}{x},\ \varphi(x)\right)=\mathrm{V.\,P.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}dx$ (см. (5)).

Если $F\in S'$, то

4. $\widetilde{F}(-x)=\widehat{F}(x)$. 5. $\widetilde{F}(-x)=\widehat{F}(x)$.

6. $\widetilde{F(ax)}=\dfrac{1}{|a|}\widetilde{F}\left(\dfrac{x}{a}\right)$. 7. $\widehat{F(ax)}=\dfrac{1}{|a|}\widehat{F}\left(\dfrac{x}{a}\right)\quad(a\neq 0)$.

8. $\widehat{e^{i\mu t}\widetilde{F}}=\widetilde{e^{-i\mu t}\widehat{F}}=F(x+\mu)$ (μ — действительное; учесть, что $e^{i\mu t}$ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста).

9. Доказать, что функция $P(x)f(x)\in S'$, если $P(x)=\sum\limits_0^n a_kx^k$ — произвольный многочлен степени n, а $f(x)\in L_p'$ (или L_p, $1\leqslant p<\infty$), или если $f(x)$ — локально интегрируемая ограниченная функция.

§ 16.8. Многомерные интегралы Фурье и обобщенные функции

Пусть $R_n = R$ есть n-мерное пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\Delta_N = \Delta_N^{(n)} = \{ |x_j| \leqslant N;\ j = 1, \ldots, n\}$ $(N > 0)$ — принадлежащий ему куб.

На R зададим локально интегрируемую, вообще говоря, комплекснозначную функцию $f(\mathbf{x})$ (т. е. $f \in L'(\Delta_N)$ или $f \in L(\Delta_N)$ при любом N). Для нее имеют смысл интегралы

$$\tilde{f}^N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u},$$

$$\hat{f}^N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u} \quad \left(\mathbf{x}\mathbf{u} = \sum_1^n x_j u_j\right), \tag{1}$$

представляющие собой непрерывные функции от $\mathbf{x}$ (см. лемму § 16.2 и замечание 1 к ней), стремящиеся к нулю, когда $|\mathbf{x}|^2 = \sum_1^n x_j^2 \to \infty$ (см. ниже теорему 1).

Преобразованием Фурье f, соответственно *обратным преобразованием Фурье* назовем функции

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N \to \infty} \tilde{f}^N(\mathbf{x}), \quad \hat{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N \to \infty} \hat{f}^N(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Эти пределы иногда рассматриваются в смысле среднего квадратического $\left(\|\tilde{f} - \tilde{f}^N\|_{L_2} \to 0,\ N \to \infty\right)$.

Теорема 1. *Если $f \in L' = L'(R)$ (или $L = L(R)$), то пределы (2) существуют в обычном смысле и определяют непрерывные ограниченные функции $\tilde{f}(\mathbf{x})$, $\hat{f}(\mathbf{x})$, обладающие свойством*

$$\lim_{|x| \to \infty} \tilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{|x| \to \infty} \hat{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Доказательство. Непрерывность и ограниченность $\tilde{f}$, $\hat{f}$ следует из леммы § 16.2 и замечания 1 к ней. Далее, если $\mathbf{e}_k$ есть единичный вектор, направленный по оси x_k, то (см. § 14.4, теорема 6)

$$|(2\pi)^{n/2}\tilde{f}(\mathbf{x})| = \frac{1}{2}\left| \int f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u} + \int f\left(\mathbf{u} + \frac{\pi \mathbf{e}_k}{x_k}\right) e^{-i(\mathbf{x}\mathbf{u}+\pi)} d\mathbf{u} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int \left| f\left(\mathbf{u} + \frac{\pi \mathbf{e}_k}{x_k}\right) - f(\mathbf{u}) \right| d\mathbf{u} \to 0 \ (x_k \to \infty).$$

Если же $|\mathbf{x}^2| = \sum_1^n x_k^2 \to \infty$, то $\max_k |x_k| \to \infty$ и $\tilde{f}(\mathbf{x}) \to 0$, но тогда и $\hat{f}(\mathbf{x}) = \tilde{f}(-\mathbf{x}) \to 0$. $\left(\int = \int_{R_n}\right)$.

Простым интегралом Фурье функции $f \in L'$ (или L) называется функция

$$S_N(\mathbf{x}) = \hat{\tilde{f}}^N =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Delta_N} e^{i\mathbf{x}\mathbf{v}} d\mathbf{v} \int f(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{u}} d\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int\limits_{\Delta_N} e^{i\mathbf{v}(\mathbf{x}-\mathbf{u})} d\mathbf{v} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin N(x_j - u_j)}{x_j - u_j} f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \frac{1}{\pi^n} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin N u_j}{u_j} f(\mathbf{x} + \mathbf{u})\, d\mathbf{u}. \tag{3}$$

Изменение порядка интегрирования следует из леммы § 16.2 и замечания 1 к ней.

При достаточно общих условиях, налагаемых на свойства функции f (см., например, ниже §§ 16.9, 16.10), можно утверждать, что

$$f(\mathbf{x}) = \lim S_N(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Delta_N} e^{i\mathbf{x}\mathbf{v}} d\mathbf{v} \int f(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{u}} d\mathbf{u} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{x}\mathbf{v}} d\mathbf{v} \int f(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{u}} d\mathbf{u}, \tag{4}$$

где внешний интеграл понимается вообще в сингулярном смысле (утверждается существование предела при $N \to \infty$ для областей Δ_N, а не каких-либо других).

Таким образом, при определенных условиях, налагаемых на f, справедливы равенства

$$f(\mathbf{x}) = \hat{\tilde{f}}(\mathbf{x}) = \tilde{\hat{f}}(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Дальнейшие факты излагаются в двумерном случае. На n-мерный случай они распространяются очевидным образом.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(y)$ — локально интегрируемые функции от одной переменной, т. е. принадлежащие $L'\left(\Delta_N^{(1)}\right)\left(L\left(\Delta_N^{(1)}\right)\right)$ при любом $N\left(\Delta_N^{(1)} = (-N, N)\right)$. Тогда, очевидно,

$$f(x)\varphi(y) \in L'\left(\Delta_N^{(2)}\right),\ \Delta_N^{(2)} = \{|x|, |y| < N\} = \Delta_N^{(1)} \times \Delta_N^{(1)}$$

и

$$\widetilde{f\varphi}^N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta_N^{(2)}}\int f(u)\varphi(v) e^{-i(xu+yv)}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\Delta_N^{(1)}} f(u) e^{-ixu} du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\Delta_N^{(1)}} \varphi(v) e^{-iyv} dv = \tilde{f}^N(x)\tilde{\varphi}^N(y). \tag{6}$$

Поэтому, если

$$\tilde{f}^N(x) \to \tilde{f}(x), \quad \tilde{\varphi}^N(y) \to \tilde{\varphi}(y) \quad (N \to \infty), \tag{7}$$

то

$$\tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(y) = \widetilde{f\varphi}(x, y). \tag{8}$$

При этом, если соотношения (7) имеют место в метрике L_2, то и соотношение (8) имеет место в метрике L_2:

$$\|\tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(y) - \widetilde{f\varphi}^N\|_{L_2(R_2)} = \|\tilde{f}(x)\tilde{\varphi}(y) - \tilde{f}^N(x)\tilde{\varphi}^N(y)\|_{L_2(R_2)} \leqslant$$
$$\leqslant \|\tilde{f}(x)(\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}^N(y))\|_{L_2(R_2)} + \|(\tilde{f}(x) - \tilde{f}^N(x))\tilde{\varphi}^N(y)\|_{L_2(R_2)} =$$
$$= \|\tilde{f}\|_{L_2(R_1)}\|\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}^N\|_{L_2(R_1)} + \|\tilde{f} - \tilde{f}^N\|_{L_2(R_1)}\|\tilde{\varphi}^N\|_{L_2(R_1)} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Из сказанного следует, что если функции $f(x)$, $\varphi(y)$ таковы, что

$$f(x) = \hat{\tilde{f}}(x) = \tilde{\hat{f}}(x), \quad \varphi(y) = \hat{\tilde{\varphi}}(y) = \tilde{\hat{\varphi}}(y)$$

в смысле обычной сходимости или в среднем, то в том же смысле

$$\widehat{\widetilde{f\varphi}}(x, y) = \hat{\tilde{f}}(x)\hat{\tilde{\varphi}}(y) = f(x)\varphi(y) = \widetilde{\widehat{f\varphi}}(x, y).$$

Рассматривая снова n-мерный случай, будем говорить, что функция $\varphi(\mathbf{x}) \in S$, если она комплекснозначна, бесконечно дифференцируема на $R = R_n$ и такова, что для любой пары целого числа $l \geqslant 0$ и целочисленного вектора $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \geqslant \mathbf{0}$ $(k_j \geqslant 0)$

$$\sup_x (1 + |\mathbf{x}|^l)|\varphi^{(k)}(\mathbf{x})| = \varkappa(l, \mathbf{k}, \varphi) < \infty \qquad \left(|\mathbf{x}| = \left(\sum_1^n x_j^2\right)^{1/2}\right).$$

Так как при любом указанном $\mathbf{k}$

$$|\varphi^{(k)}(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\varkappa(n+1, \mathbf{k}, \varphi)}{1 + |x|^{n+1}},$$

то, очевидно, частная производная $\varphi^{(k)}$ — ограниченная функция, принадлежащая к $L_p(R)$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Если функции φ_m, $\varphi \in S$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и для любой (указанной) пары $(l, \mathbf{k})$

$$\varkappa(l, \mathbf{k}; \varphi_m - \varphi) \to 0 \ (m \to \infty),$$

то будем писать $\varphi_m \to \varphi(S)$ и говорить, что φ_m *стремится к* φ *в топологии* (S) (в смысле (S)).

Операция $A\varphi$, отображающая S в S, называется *линейной*, если $A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi$, где φ, $\psi \in S$ и α, β — комплексные числа, и *непрерывной*, если из $\varphi_N \to \varphi$ (S) следует $A\varphi_N \to A\varphi$ (S).

Для того чтобы линейная операция $A\varphi$ была непрерывной, достаточно), чтобы для любой пары $(l, \mathbf{k})$ существовала константа $C_{l,\mathbf{k}}$ и зависящая от $(l, \mathbf{k})$ конечная система пар $(l_j, \mathbf{k}^j)$ $(j = 1, \ldots, m)$, так что*

$$\varkappa(l, \mathbf{k}, A\varphi) \leqslant C_{l,\mathbf{k}} \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, \mathbf{k}^j, \varphi) \text{ (для всех } \varphi \in S),$$

потому что, если $\varphi_\nu \to \varphi(S)$, то

$$\varkappa(l, \mathbf{k}, A(\varphi_\nu - \varphi)) \leqslant C_{l,\mathbf{k}} \sum_{j=1}^{m} \varkappa(l_j, \mathbf{k}^j, \varphi_\nu - \varphi) \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Важными линейными непрерывными операциями $A\varphi(\varphi \in S, A\varphi \in S)$ являются:

1) Операция взятия производной от φ

$$\varphi^{(\mu)} = \frac{\partial^{|\mu|}\varphi}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n}} \left(|\mu| = \sum_1^n \mu_j\right).$$

Ведь

$$\varkappa(l, \mathbf{k}, \varphi^{(\mu)}) = \varkappa(l, \mathbf{k} + \mu, \varphi).$$

2) Операция умножения φ на бесконечно дифференцируемую функцию $\lambda(\mathbf{x})$ полиномиального роста $(\lambda\varphi = \lambda(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}))$, т. е. такую, что для любого $\mathbf{k}$ (целого неотрицательного) найдется целое число $l(\mathbf{k})$, для которого

$$|\lambda^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x})| \leqslant C(1 + |\mathbf{x}|^{l(\mathbf{k})}),$$

где C не зависит от $\mathbf{x}$. Ведь

$$\left|(1 + |\mathbf{x}|^l)(\lambda\varphi)^{(\mathbf{k})}\right| = (1 + |\mathbf{x}|^l)\left|\sum_{0 \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}} \lambda^{(\mathbf{s})} \varphi^{(\mathbf{k}-\mathbf{s})}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{0 \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{k}} (1 + |\mathbf{x}|^l)(1 + |\mathbf{x}|^{l(\mathbf{s})}) |\varphi^{(\mathbf{k}-\mathbf{s})}| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{0 \leqslant \mathbf{s} \leqslant \mathbf{k}} \varkappa(l + l(\mathbf{s}), \mathbf{k} - \mathbf{s}, \varphi),$$

$$C_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{k}!\,(\mathbf{k} - \mathbf{s})!}{\mathbf{s}!} = \frac{k_1! \ldots k_n! (k_1 - s_1)! \ldots (k_n - s_n)!}{s_1! \ldots s_n!}.$$

3) Операции преобразования Фурье $\widetilde{\varphi}$ и обратного преобразования Фурье φ.

Если учесть, что $(\varphi \in S)$

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(\mathbf{u}) e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix_1u_1} du_1 \ldots \int e^{-ix_nu_n} \varphi(\mathbf{u})\, du_n = \overset{1\sim \ldots n\sim}{\varphi}, \tag{9}$$

*) На самом деле не только достаточно, но и необходимо.

где $j\sim$ — знак операции преобразования Фурье только по переменной x_j, то непрерывность операции $\sim$ сводится к непрерывности операций $j\sim$ $(j=1, \ldots, n)$.

Покажем, что линейная *операция* ${}^{j}\widetilde{\varphi}$ *отображает* S *на* S *непрерывно и взаимно однозначно.*

Ограничимся при доказательстве двумерным случаем:

$$\psi(x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\varphi(t, y)\, e^{-ixt}dt \qquad (\varphi(x, y)\in S).$$

Положив (пояснения ниже)

$$g(t, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-it)^{k_1}\frac{\partial\varphi^{k_2}}{\partial y^{k_2}}(t, y),$$

получим (интегрируя по частям)

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}\psi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}=\int g(t, y)\, e^{-ixt}dt=\frac{1}{ix}\int\frac{\partial g}{\partial x}(t, y)\, e^{-ixt}dt=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{(ix)^l}\int\frac{\partial^l g}{\partial x^l}(t, y)\, e^{-ixt}dt. \qquad (10)$$

Так как t^{k_1}— бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста ($k_1\geqslant 0$ — целое!), то $g(t, y)\in S$ и непрерывно (в смысле (S)) зависит от φ. Поэтому, в частности, $g(t, y)\to 0$ $(t\to\pm\infty)$, откуда следует цепочка равенств (10).

Из (10) следует

$$\left|x^l\frac{\partial^{k_1+k_2}\psi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|\leqslant\int\frac{dt}{1+t^2}\varkappa(2; l, 0; g)\leqslant C\varkappa(2; l, 0; g),$$

и потому (применив (10) еще при $l=0$) получим

$$(1+|x|^l)\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}\psi}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right|\leqslant C_1(\varkappa(2; 0, 0; g)+\varkappa(2; l, 0; g)),$$

следовательно, ψ непрерывно (в смысле (S)) зависит от g, но тогда вместе с g — и от φ.

Если $\psi(x, y)\in S$ — произвольная функция, то ${}^{x}\widehat{\psi}\in S$ и $\psi={}^{x\sim}({}^{x}\widehat{\psi})$, и операция $x\sim$ отображает S не только *в*, но и *на* S.

Наконец, из равенства ${}^{x}\widetilde{\varphi}_1={}^{x}\widetilde{\varphi}_2$ следует ${}^{x}\widetilde{(\varphi_1-\varphi_2)}=0$, откуда $\varphi_1-\varphi_2={}^{x}\widehat{0}=0$, и мы доказали взаимную однозначность, осуществляемую отображением ${}^{x}\widetilde{\varphi}$ (S на S).

Теперь из (9) следует, что и *операция* $\widetilde{\varphi}$ *отображает* S *на* S *взаимно однозначно и непрерывно.*

Отметим, что любые две из операций

$$1\sim, \ldots, n\sim, 1\wedge, \ldots, n\wedge$$

перестановочны между собой. *Для всякой функции $\varphi\in S$ имеют место равенства*

$$\varphi=\hat{\tilde{\varphi}}=\tilde{\hat{\varphi}} \tag{11}$$

в любой точке $x\in R$. Например, в двумерном случае $\varphi(x, y)$

$$\hat{\tilde{\varphi}}={}^{x\wedge y\wedge y\sim x\sim}\varphi={}^{x\wedge x\sim}\varphi=\varphi.$$

Отметим на примере функции $\varphi(x, y)$ двух переменных еще следующий факт:

$$\widehat{\lambda(x)\tilde{\varphi}(x, y)}={}^{x}\widehat{\lambda(x)^{x\sim}\varphi(x, y)}, \tag{12}$$

где $\lambda(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста. В самом деле,

$$\widehat{\lambda(x)\tilde{\varphi}}=\widehat{\lambda(x)^{y\sim x\sim}\varphi}={}^{y\sim}\left(\widehat{\lambda(x)^{x\sim}\varphi}\right)={}^{x}\widehat{\lambda(x)^{x\sim}\varphi},$$

ведь, например, $x\wedge y\wedge y\sim=x\wedge$.

Имеют также место равенства ($\varphi, \psi\in S$)

$$(\tilde{\varphi}, \psi)=(\varphi, \tilde{\psi}),\quad (\varphi, \psi)=\int_R\varphi(\mathbf{t})\,\psi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}^{*)}, \tag{13}$$

$$\left(\varphi^{(\mathbf{k})}, \psi\right)=(-1)^{|\mathbf{k}|}\left(\varphi, \psi^{(\mathbf{k})}\right), \tag{14}$$

$$\varphi^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x})=\widehat{(i\mathbf{x})^{\mathbf{k}}\tilde{\varphi}}=\widetilde{(-i x)^{\mathbf{k}}\hat{\varphi}}\quad\left((ix)^{\mathbf{k}}=|i|^{|\mathbf{k}|}x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\right), \tag{15}$$

$$\widehat{K\tilde{\varphi}}=\widetilde{\hat{K}\hat{\varphi}}=K*\varphi=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int K(\mathbf{u})\,\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{u})\,d\mathbf{u}\quad (K\in L' \text{ или } L). \tag{16}$$

Они обобщают соответствующие равенства § 16.6, (4), (5), (6), (7) и доказывается аналогично.

Над S строится *пространство S' обобщенных функций n* переменных аналогично соответствующему одномерному пространству.

Таким образом, *обобщенной функцией $F\in S'$* называется линейный непрерывный функционал (F, φ) $(\varphi\in S)$.

Для того чтобы линейный функционал (F, φ) был непрерывным, достаточно, чтобы нашлась зависящая от него система пар $(l_1, \mathbf{k}^1), \ldots, (l_m, \mathbf{k}^m)$ и константа C такие, что (см. § 16.7, (1))

$$|(F, \varphi)|\leqslant C\sum_{j=1}^{m}\varkappa\left(l_j, \mathbf{k}^l, \varphi\right)\quad (\text{для всех } \varphi\in S).$$

Функция $F(\mathbf{x})\in L_p'$ (или L_p) $(1\leqslant p<\infty)$ или локально интегрируемая функция $F(\mathbf{x})$ полиномиального роста $(|F(\mathbf{x})|\leqslant C(1+|\mathbf{x}^l|)$

---

*) Функция ψ под знаком интеграла здесь взята без знака сопряжения.

при некотором l) представляет обобщенную функцию

$$(F, \varphi) = \int F(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \quad \left(\int = \int_{R_n},\ \varphi \in S\right),$$

и при этом две такие функции, отличающиеся хотя бы в одной точке их непрерывности (или в лебеговом случае на множестве положительной меры), представляют разные обобщенные функции, что доказывается, как в случае одной переменной, но с помощью функции $\psi(|(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)/\delta)|)$ от n переменных (см. ниже упражнение 1).

Функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ есть n-мерная δ-функция — обобщенная функция от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, не представляемая локально интегрируемой функцией. Операции λF, где λ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста (вместе со своими производными!), $F^{(k)}$, $\widetilde{F}$, $\widehat{F}$, ${}^j\widetilde{F}$, ${}^j\widehat{F}$ определяется при помощи равенств:

$$(\lambda F, \varphi) = (F, \lambda\varphi),\ (F^{(k)}, \varphi) = (-1)^{|\mathbf{k}|}(F, \varphi^{(\mathbf{k})}),$$

$$(\widetilde{F}, \varphi) = (F, \widetilde{\varphi}),\ (\widehat{F}, \varphi) = (F, \widehat{\varphi}),\ ({}^j\widetilde{F}, \varphi) = (F, {}^j\widetilde{\varphi})\ ({}^j\widehat{F}\varphi) = (F, {}^j\widehat{\varphi}),$$

откуда, в частности, следует

$$F^{(\mathbf{k})} = \widehat{(i\mathbf{x})^{\mathbf{k}}\widetilde{F}} = \widetilde{(-i\mathbf{x})^{(\mathbf{k})}\widehat{F}}.$$

Сходимость $F_N \to F(S')$ понимается в том смысле, что $(F_N, \varphi) \to (F, \varphi)(N \to \infty)$ для всех $\varphi \in S$. Наконец, как в одномерном случае, вводится свертка

$$K * F = \widehat{\widetilde{K}\widetilde{F}} = \widetilde{\widehat{K}\widehat{F}} \quad (F \in S'),$$

где $K \in S'$ и при этом $\widetilde{K}$ — бесконечно дифференцируемая функция полиномиального роста (см. еще § 18.3).

Двумерный простой интеграл Фурье для функции $f(x, y) \in L' = L'(R_2)$ (или $L(R_2)$) и для любого $\eta > 0$ может быть записан в виде

$$S_N(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\int_{K_\eta} \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} f(x+u, y+v)\,du\,dv + o(1) \quad (N \to \infty), \tag{17}$$

где K_η — η-крест, т. е. множество точек (u, v), удовлетворяющих одному из неравенств

$$|u| < \eta, \ |v| < \eta.$$

Это следует из соотношения

$$\int_\eta^\infty \int_\eta^\infty \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} f(x + u, y + v)\,du\,dv \to 0 \quad (N \to \infty),$$

представляющего собой простое обобщение леммы 1 § 15.4 на двумерный случай, и подобных соотношений для интегралов, распространенных на области, симметричные $\{\eta \leqslant x,\ y\}$ относительно осей координат и нулевой точки $(0, 0)$.

Подчеркнем, что в (17) нельзя заменить крест K_η на квадрат

$$\Delta_\eta = \{|u|,\ |v| \leqslant \eta\}.$$

В этом существенное отличие многомерного случая от одномерного. В то время как в одномерном случае сходимость в точке x простого интеграла Фурье функции $f \in L'(L_1)$ или суммы Фурье периодической функции $f \in L'^*$ (L^*) всецело зависит от поведения f в любой малой окрестности x, в двумерном (многомерном) случае это уже не так: функция $f \in L'$ (L'^*) может быть равна нулю в окрестности точки (x, y), но ее простой интеграл (или сумма Фурье) может не сходиться при $N \to \infty$ к $f(x, y)$.

Чтобы пояснить, от чего зависит это явление, введем множество $C_0(\Delta')$ всевозможных непрерывных финитных функций $f(u, v)$ с носителем, принадлежащим к прямоугольнику

$$\Delta' = \{0 < u < \eta,\quad \eta < v < 2\eta,\quad \eta > 0\},$$

с нормой

$$\|f\|_{C_0(\Delta')} = \max_{(u,v)\in\Delta'} |f(u, v)|.$$

Каждой функции $f \in C_0(\Delta')$ приведем в соответствие ее простой интеграл

$$S_N(f) = S_N(f, 0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Delta'} \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} f(u, v)\, du\, dv$$

в точке $(0, 0)$.

Верхняя грань этого интеграла, распространенная на всевозможные функции $f \in C_0(\Delta')$ с $\|f\| \leqslant 1$, равна

$$\Lambda_N = \sup S_N(f, 0, 0) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Delta'} \left| \frac{\sin Nu}{u} \frac{\sin Nv}{v} \right| du\, dv = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{N\eta} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du \cdot \int_{\eta N}^{2\eta N} \left| \frac{\sin v}{v} \right| dv.$$

Легко доказать, что

$$\Lambda_N \to \infty, \qquad N \to \infty$$

(воспользоваться рассуждениями теоремы 3 § 9.15).

С точки зрения функционального анализа Λ_N есть норма функционала $S_N(f, 0, 0)$, определенного в пространстве $C_0(\Delta')$. Из того, что $\Lambda_N \to \infty$, следует (как это доказывается в функциональном анализе) существование функции $f \in C_0(\Delta')$ такой, что для нее функционал $S_N(f, 0, 0)$ неограничен (на множестве $N = 1, 2, \ldots$).

Упражнения.

1. Доказать, что

$$\left(|\mathbf{x}|^2 = \sum_1^n x_j^2\right) e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S, \quad \psi\left(\left|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{\delta}\right|\right) \in S$$

($\delta > 0$, см. упражнение 2 § 16.6).

2. Показать, что $\widehat{f(\mathbf{x}+\boldsymbol{\mu})} = e^{i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}}\widehat{f} = e^{-i\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}}\widetilde{f}$ $\left(\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n),\ t = (t_1 \ldots t_n),\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{t} = \sum_1^n \mu_j t_j\right)$.

3. Показать, что верхняя грань сумм Фурье $S_n(f, 0)$, порядка n в точке $x = 0$, распространенная на все функции $f \in C_*$ от одной переменной с $\|f\|_{C_*} \leqslant 1$, равна

$$\sup_{\|f\|_{C_*} \leqslant 1} |S_n(f, 0)| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\, dt \to \infty, \quad n \to \infty,$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Отсюда в силу упомянутой выше теоремы функционального анализа следует существование функции $f \in C_*$, ряд Фурье которой в точке $x = 0$ расходится.

§ 16.9. Ступенчатые финитные функции. Квадратические приближения

Рассмотрим сначала простейшую ступенчатую финитную функцию ($\delta > 0$) от одной переменной

$$\varphi_{a,\delta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a-\delta, a+\delta), \\ 0, & x \notin [a-\delta, a+\delta], \\ \frac{1}{2}, & x = a-\delta, a+\delta. \end{cases} \tag{1}$$

Ее преобразование Фурье равно

$$\widetilde{\varphi}_{a,\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-ixt}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa}\,\frac{e^{ix\delta} - e^{-ix\delta}}{2ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa}\,\frac{\sin x\delta}{x}, \tag{2}$$

и потому, учитывая, что $\varphi_{a,\delta} \in L'$ есть локально кусочно гладкая функция, получим

$$\varphi_{a,\delta}(x) = \widehat{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ixa}\,\frac{\sin x\delta}{x}}. \tag{3}$$

Функция $\varphi_{a,\delta}$ принадлежит, очевидно, L_2'. Из формулы (2) также видно, что $\widetilde{\varphi}_{a,\delta}$ не принадлежит L', но принадлежит L_2' (вообще L_p', $1 < p < \infty$) и при этом

$$\|\varphi_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = 2\delta,$$

$$\|\widehat{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = \|\widetilde{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}^2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x\delta}{x}\right)^2 dx = 2\delta$$

(см. § 15.9, (9)). Таким образом, справедливы равенства

$$\|\varphi_{a,\delta}\|_{L_2} = \|\widetilde{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2} = \|\widehat{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2}. \tag{4}$$

Мы увидим, что они имеют место для всех функций $\varphi \in L_2$.

В силу определения (см. § 16.4) операций $\sim, \wedge, \sim N, \wedge N$ и того факта, что $\varphi_{a,\delta} \in L'$ — локально кусочно гладкая функция, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi}^N_{a,\delta}(x) \to \widetilde{\varphi}_{a,\delta}(x)\ (N\to\infty) \\ &\widehat{\widetilde{\varphi}}^N_{a,\delta}(x) \to \varphi_{a,\delta}(x) \end{aligned} \tag{5}$$

для любого действительного x.

Важно отметить, что имеет место не только поточечная сходимость, но и сходимость в метрике $L_2 = L_2(-\infty, \infty)$, т. е.

$$\|\widetilde{\varphi}^N_{a,\delta} - \widetilde{\varphi}_{a,\delta}\|_{L_2} \to 0\ (N\to\infty), \tag{6}$$

$$\|\widehat{\widetilde{\varphi}}^N_{a,\delta} - \varphi_{a,\delta}\|_{L_2} \to 0. \tag{7}$$

Соотношение (6) тривиально, потому что для достаточно больших N отрезок $[a-\delta, a+\delta]$ принадлежит к $[-N, N]$, откуда

$$\widetilde{\varphi}_{a,\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} \varphi_{a,\delta}(t)\, e^{-ixt}\,dt = \widetilde{\varphi}^N_{a,\delta}(x).$$

Более сложно доказывается (7). Имеем

$$\widehat{\widetilde{\varphi}}^N_{a,\delta}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{\sin N(t-x)}{t-x}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{N(a-\delta-x)}^{N(a+\delta-x)} \frac{\sin z}{z}\,dz =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi}\int_{N(a+\delta-x)}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{N(a-\delta-x)} \frac{\sin z}{z}\,dz,$$

потому что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz = 1.$$

Поэтому, учитывая (1), получим

$$\sqrt{\int_{\infty}^{\infty} \left|\varphi_{a,\delta}(x) - \widehat{\widetilde{\varphi}}^N_{a,\delta}(x)\right|^2 dx} \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{8}$$

где

$$I_1=\left(\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{N(a+\delta-x)}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2},$$

$$I_2=\left(\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{N(a-\delta-x)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2},$$

$$I_3=\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\delta}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{N(a-\delta-x)}^{N(a+\delta-x)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2},$$

$$I_4=\left(\int\limits_{a+\delta}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{N(a-\delta-x)}^{N(a+\delta-x)}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Полагая $u=N(a+\delta-x)$, получим

$$(\pi I_1)^2=\frac{1}{N}\int\limits_0^{2\delta N}du\left(\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2.$$

Но

$$\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz=-\left.\frac{\cos z}{z}\right|_u^{\infty}-\int\limits_u^{\infty}\frac{\cos z}{z^2}\,dz;$$

поэтому

$$\left|\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{u}+\frac{1}{u}=\frac{2}{u}.$$

Этой оценкой воспользуемся для $u>1$. Для $u<1$ нам будет достаточно принять во внимание, что

$$\left|\int\limits_u^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|<K,$$

где K — константа, не зависящая от u. Тогда из (9) следует, что

$$(\pi I_1)^2\leqslant\frac{1}{N}\left(\int\limits_0^1 K^2\,du+\int\limits_1^{\infty}\frac{4\,du}{u^2}\right)\leqslant\frac{C}{N}\to 0\quad(N\to\infty).$$

По аналогии доказывается, что

$$I_2\to 0\qquad(N\to\infty).$$

Далее (подстановка $u = N(x - a - \delta)$ и затем $z = -z'$)

$$(\pi I_4)^2 = \frac{1}{N}\int_0^\infty du\left(\int_{-u-2N\delta}^{-u}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2 = \frac{1}{N}\int_0^\infty du\left(\int_u^{u+2N\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz\right)^2.$$

Поэтому

$$(\pi I_4)^2 \leqslant \frac{1}{N}\left(\int_0^1 (2K)^2\,dz + \int_1^\infty \frac{4}{z^2}\,dz\right) < \frac{C_1}{N} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Аналогично доказывается, что

$$I_3 \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Этим соотношение (7) доказано.

Конечно, в (5), (6), (7) можно поменять местами $\sim$ и $\wedge$.

Отметим, что если интервалы $(a - \delta,\ a + \delta)$ и $(b - \sigma,\ b + \sigma)$ не пересекаются, то наряду с очевидным равенством

$$\int \varphi_{a,\delta}(x)\,\varphi_{b,\sigma}(x)\,dx = 0$$

справедливы также следующие важные равенства:

$$\int \tilde{\varphi}_{a,\delta}(x)\,\overline{\tilde{\varphi}}_{b,\sigma}(x)\,dx = \int \hat{\varphi}_{a,\delta}\overline{\hat{\varphi}}_{b,\sigma}\,dx = 0.$$

В самом деле, $\tilde{\varphi}_{a,\delta}$, $\tilde{\varphi}_{b,\sigma} \in L_2$, и потому существует абсолютно сходящийся интеграл (пояснение ниже, см. сноску на стр. 272)

$$\int \tilde{\varphi}_{a,\delta}\overline{\tilde{\varphi}}_{b,\sigma}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\tilde{\varphi}_{a,\delta}\overline{\tilde{\varphi}}_{b,\sigma}\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\int e^{-ixu}\varphi_{a,\delta}(u)\,du\int e^{ixv}\varphi_{b,\sigma}(v)\,dv\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int \varphi_{a,\delta}(u)\left(\frac{1}{\pi}\int \varphi_{b,\sigma}(v)\frac{\sin N(u-v)}{u-v}\,dv\right)du =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int \varphi_{a,\delta}(u)\,\hat{\tilde{\varphi}}{}^{N}_{b,\sigma}(u)\,du = \int \varphi_{a,\delta}\varphi_{b,\sigma}\,du.$$

Все три интеграла в третьем члене цепи имеют конечные пределы, и законна перестановка порядка интегрирования, приводящая после интегрирования по x к четвертому члену. Переход от пятого члена цепи к шестому (предпоследнему) следует из того, что $\hat{\tilde{\varphi}}{}^{N}_{b,\sigma} \to \varphi_{b,\sigma}$ в смысле L_2.

Произвольная финитная ступенчатая функция от одной переменной может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_1^m c_k\varphi_{a_k,\delta_k}(x),$$

где c_k — постоянные коэффициенты, вообще комплексные, и интервалы $(a_k-\delta_k,\ a_k+\delta_k)$ и $(a_l-\delta_l,\ a_l+\delta_l)$ при $k\neq l$ не пересекаются.

Дальнейшие факты излагаются в двумерном случае. Приводимые формулировки и доказательство распространяются на n-мерный случай очевидным образом.

В двумерном случае простейшая финитная ступенчатая функция имеет вид

$$\varphi_\Delta(x, y)=\begin{cases}1 & ((x, y)\in\Delta),\\ 0 & ((x, y)\,\overline{\in}\,\Delta),\end{cases}$$

где

$$\Delta=\{a-\delta\leqslant x<a+\delta,\ b-\sigma\leqslant y<b+\sigma\}.$$

— прямоугольник. Во всех ее точках непрерывности

$$\varphi_\Delta(x, y)=\varphi_{a,\,\delta}(x)\varphi_{b,\,\sigma}(y). \tag{10}$$

Произвольная финитная ступенчатая функция f от переменных (x, y) может быть записана в виде конечной суммы

$$f(x, y)=\sum_1^m c_k\varphi_{\Delta^k}(x, y)=\sum_1^m c_k\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\,\varphi_{b_k,\sigma_k}(y), \tag{11}$$

где c_k — постоянные числа, вообще комплексные, а прямоугольники

$$\Delta^1, \ldots, \Delta^m \tag{12}$$

попарно не пересекаются.

Из сказанного выше следует, что

$$\tilde{f}^N(x, y)\to\tilde{f}(x, y)=\sum_1^m c_k\tilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}(x)\,\tilde{\varphi}_{b_k,\sigma_k}(y)\quad (N\to\infty), \tag{13}$$

$$\hat{f}^N=\sum_1^m c_k\hat{\varphi}^N_{a_k,\delta_k}(x)\,\hat{\varphi}^N_{b_k,\sigma_k}(y)\to\sum_1^m c_k\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\,\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)=$$
$$=f(x, y)\quad (N\to\infty),$$

где сходимость поточечная (во втором соотношении, в точках непрерывности функций $\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\,\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)$), а также в смысле среднего квадратического.

Множество всех ступенчатых финитных функций обозначим через $\mathfrak{M}$.

Если наряду с $f\in\mathfrak{M}$ задана другая функция $\psi\in\mathfrak{M}$, то можно считать, что

$$\psi(x, y)=\sum_1^m c'_k\varphi_{\Delta^k}(x, y), \tag{14}$$

и система прямоугольников Δ^k — та же, что и в (12), потому что объединение двух систем прямоугольников, определяющих f и φ, можно, очевидно, представить как сумму конечного числа прямоугольников, пересекающихся попарно разве что по своим границам.

Важно отметить, что *)

$$(f, \varphi) = \int\int f(x, y)\overline{\varphi(x, y)}\,dx\,dy =$$
$$= \sum_1^m c_k \overline{c}'_k \int\int \varphi_{a_k,\delta_k}(x)\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)\overline{\varphi_{a_k,\delta_k}(x)\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)}\,dx\,dy =$$
$$= \sum_1^m c_k \overline{c}'_k \int |\varphi_{a_k,\delta_k}(x)|^2 dx \int |\varphi_{b_k,\sigma_k}(y)|^2 dy =$$
$$= \sum_1^m c_k \overline{c}'_k \int |\widetilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}(x)|^2 dx \int |\widetilde{\varphi}_{b_k,\sigma_k}(y)|^2 dy = (\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}), \qquad (15)$$

потому что, очевидно, функции $\varphi_{\Delta k}(x, y)$ и $\varphi_{\Delta l}(x, y)$ для $k \neq l$ ортогональны на плоскости и в одномерном случае верны равенства (4).

Последнее равенство цепи доказывается как равенство первого и четвертого ее членов, если в них заменить f, φ соответственно на $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$ и учесть ортогональность $\widetilde{\varphi}_{a_k,\delta_k}$ с $\widetilde{\varphi}_{a_i,\delta_i}$, $k \neq i$. Из (15) следует, в частности,

$$(f, f) = (\widetilde{f}, \widetilde{f}) \text{ для всех } f \in \mathfrak{M}.$$

§ 16.10. Теорема Планшереля. Оценка сходимости простого интеграла

Эта теорема носит законченный характер, если ее формулировать на языке лебегова пространства L_2, имеющего то преимущество перед L'_2, что оно полно (см. свойство 20, § 19.3). Мы сформулируем эту теорему и даем ее доказательство, основанное на том факте (см. свойство 18, § 19.3), что *множество ступенчатых финитных функций плотно в* L_2.

Теорема 1 (Планшереля). *Для каждой функции* $f \in L_2 = L_2(R_n)$ *существуют ее преобразования Фурье* $\widetilde{f}$, $\widehat{f} \in L_2$:

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{f}^N(\mathbf{x}) = \lim \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u}, \qquad (1)$$

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widehat{f}^N(\mathbf{x}) = \lim \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} d\mathbf{u}, \qquad (1')$$

*) В этих рассуждениях рассматривается скалярное произведение f и φ (со знаком комплексного сопряжения над φ), имея в виду применение формулы (15) в следующем параграфе (см. сноску к (4) § 16.6).

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{x} = (x_1 \ldots, x_n)$, $\mathbf{ux} = \sum_{i=1}^{n} u_j x_j$,

$$\Delta_N = \{|x_j| \leqslant N;\ j = 1, \ldots, n\},$$

и сходимость понимается в смысле L_2.

Преобразования $\tilde{f}$, $\hat{f}$

1) *линейны*;

2) *отображают* L_2 *на* L_2 *взаимно однозначно*;

3) *взаимнообратимы* ($f = \hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}$, $f \in L_2$);

4) *сохраняют скалярное произведение*: $(f, \psi) = (\tilde{f}, \tilde{\psi}) = (\hat{f}, \hat{\psi})$, $(f, \psi \in L_2)$, *таким образом, изометричны* $(\|f\| = \|\tilde{f}\| = \|\hat{f}\|)$,

$$(f, \varphi) = \int f(\mathbf{u})\, \overline{\varphi(\mathbf{u})}\, d\mathbf{u}, \quad \int_{R_n} = \int.$$

Доказательство. В предыдущем параграфе было доказано, что ступенчатые финитные функции $f (f \in \mathfrak{M})$ не только принадлежат L_2, но и отображаются при помощи операций $\tilde{f}, \hat{f}$ в L_2, и для них выполняется свойство 4).

Пусть теперь функция $f \in L_2$ и пока финитна. Тогда при достаточно большом N ее носитель принадлежит Δ_N и

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \tilde{f}^N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{xu}}\, d\mathbf{u}. \tag{2}$$

В этом случае $f \in L$ и потому (см. § 16.2) $\tilde{f}$ — непрерывная функция на $R = R_n$. Докажем, что она принадлежит к L_2 и что

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| \quad (\|\ \| = \|\ \|_{L_2}). \tag{3}$$

В самом деле, существует последовательность финитных ступенчатых функций $f_\nu (f_\nu \in \mathfrak{M})$ с носителями, принадлежащими Δ_N, таких, что

$$\|f - f_\nu\| \to 0 \quad (\nu \to \infty). \tag{4}$$

Отсюда

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_\nu(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left| \int_{\Delta_N} [f(t) - f_\nu(t)]\, e^{-ixt} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f - f_\nu\| (2N)^{n/2} \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

Таким образом, $\tilde{f}_\nu(x) \to \tilde{f}(x)$ равномерно на R_n. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу (4) и свойства 4), уже проверенного для функций $f_\nu \in \mathfrak{M}$, для достаточно большого s

$$\varepsilon > \|f_p - f_q\| = \|\tilde{f}_p - \tilde{f}_q\| \geqslant \|\tilde{f}_p - \tilde{f}_q\|_{L_2(\Delta_\lambda)}, \quad p, q > s, \tag{5}$$

где $\lambda > 0$ — произвольное число. Но в силу равномерной сходимости $\tilde{f}_q \to \tilde{f}$ и конечности прямоугольника Δ_λ можно перейти при $q \to \infty$ к пределу под знаком нормы (интеграла) и получить неравенство

$$\varepsilon \geqslant \|\tilde{f}_p - \tilde{f}\|_{L_2(\Delta_\lambda)} \quad (p > s).$$

Если теперь при фиксированном p увеличить до бесконечности λ, то получим в пределе неравенство

$$\varepsilon \geqslant \|\tilde{f}_p - \tilde{f}\| \geqslant |\|\tilde{f}_p\| - \|\tilde{f}\|| \quad (p > s),$$

которое мы дополнили еще вторым очевидным неравенством. Поэтому

$$\|\tilde{f}\| = \lim_{p\to\infty} \|\tilde{f}_p\| = \lim_{p\to\infty} \|f_p\| = \|f\|,$$

и мы доказали, что $\tilde{f} \in L_2$, а также справедливость равенства (3).

Справедливость соотношения (1) для рассматриваемой функции $f \in L_2$ (с компактным носителем) тривиальным образом следует из равенства (2) для достаточно больших N.

Пусть теперь $f \in L_2$ — произвольная функция. Тогда для любых положительных N и N' $(N < N')$ имеет место (пояснение ниже)

$$\|f^{N'} - f^N\| = \left\| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_{N'} - \Delta_N} f(\mathbf{u})\, e^{-i\mathbf{x}\mathbf{u}}\, d\mathbf{u} \right\| =$$

$$= \|f\|_{L_2(\Delta_{N'} - \Delta_N)} \to 0, \quad N, N' \to \infty, \tag{6}$$

и вследствие полноты L_2 существует в L_2 функция, которую мы обозначим через $\tilde{f}$, такая, что

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}^N\| \to 0 \quad (N \to \infty), \tag{7}$$

т. е. имеет место (4).

Функцию $\tilde{f}^{N'} - \tilde{f}^N$ можно рассматривать как преобразование Фурье функции, имеющей компактный носитель, равной $f(\mathbf{x})$ на $\Delta_{N'} - \Delta_N$ и нулю в остальных точках. Для такой функции свойство сохранения нормы ее преобразования Фурье уже доказано. Это объясняет (6).

Из (7) следует:

$$\|\tilde{f}\| = \lim_{N\to\infty} \|\tilde{f}^N\| = \lim_{N\to\infty} \|f\|_{L_2(\Delta_N)} = \|f\|.$$

Линейность операции $\sim$ очевидна. Имеет также место ее непрерывность

$$\|\tilde{f}_k - \tilde{f}\| = \|\widetilde{f_k - f}\| = \|f_k - f\| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

В силу того, что $\tilde{f}(-x) = \hat{f}(x)$, полученные результаты верны и для операции $\wedge$.

Теперь нетрудно доказать равенства

$$f=\widehat{\widetilde{f}}=\widetilde{\widehat{f}},\ f\in L_2. \tag{8}$$

Ведь для функций $f\in\mathfrak{M}$ они верны, и так как для $f\in L_2$ найдется последовательность функций $f_\nu\in\mathfrak{M}$ такая, что $\|f_\nu-f\|\to 0$, то в силу непрерывности операций $\sim$, $\wedge$ равенство (8) можно получить из равенств

$$f_\nu=\widehat{\widetilde{f}}_\nu=\widetilde{\widehat{f}}_\nu$$

переходом к пределу при $\nu\to\infty$.

Если $\psi\in L_2$, то $\widehat{\psi}\in L_2$ и $\psi=\widetilde{\widehat{\psi}}$. Это показывает, что операция $\sim$ отображает L_2 на L_2 и притом взаимно однозначно, так как из $\widetilde{\psi}_1=\widetilde{\psi}_2$ следует $\psi_1-\psi_2=\widehat{\widetilde{\psi}_1-\widetilde{\psi}_2}=\widehat{0}=0$.

В этих рассуждениях символ $\sim$ можно поменять местами с символом $\wedge$. Мы доказали свойство 2).

Наконец, если

$$\|f-f_\nu\|,\ \|\varphi-\varphi_\nu\|\to 0\quad(\nu\to\infty,\ f_\nu,\ \varphi_\nu\in\mathfrak{M}),$$

то из равенств

$$(f_\nu,\ \varphi_\nu)=(\widetilde{f}_\nu,\ \widetilde{\varphi}_\nu)$$

следует путем перехода к пределу

$$(f,\ \varphi)=(\widetilde{f},\ \widetilde{\varphi}).$$

Ведь

$$|(f,\ \varphi)-(f_\nu,\ \varphi_\nu)|=|((f-f_\nu),\ \varphi)-(f_\nu,\ \varphi_\nu-\varphi)|\leqslant$$
$$\leqslant\|f-f_\nu\|\|\varphi\|+\|f_\nu\|\|\varphi_\nu-\varphi\|\to 0\ (\nu\to\infty).$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (аналог теоремы 6 § 15.11). *Пусть* $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,\ \ldots,\ \lambda)$ — *вектор, где* λ — *натуральное число, и пусть для любого неотрицательного целого вектора* $\mathbf{k}\leqslant\boldsymbol{\lambda}$ *частная производная* $f^{(\mathbf{k})}$ (*в частности,* f) *непрерывна и выполняются неравенства*

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int|f^{(\mathbf{l})}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\leqslant M^2$$

для любого $\mathbf{l}=(l_1,\ \ldots,\ l_n)$ *с координатами* l_j, *равными* 0 *или* λ. *Тогда простой интеграл* $S_N(\mathbf{x})$ *функции* $f(\mathbf{x})$ *отклоняется от нее с оценкой*

$$|f(\mathbf{x})-S_N(\mathbf{x})|\leqslant\frac{CM}{N^{\lambda-\frac{1}{2}}}, \tag{9}$$

где C *зависит от* λ, *но не от* M *и* N.

Доказательство. Оценим функцию

$$\rho_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N'} \tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} \, d\mathbf{u},$$

где

$$\Delta_N' = R_n - \Delta_N.$$

Можно еще сказать, что Δ_N' есть множество точек $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ таких, что $\max\limits_j |u_j| \geqslant N$.

Так как $f \in L_2$, то по теореме Планшереля $\tilde{f} \in L_2$ и $\rho_N(\mathbf{x})$ можно рассматривать как предел (в среднем)

$$\rho_N(\mathbf{x}) = \lim_{N_1 \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_{N_1} - \Delta_N} \tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} d$$

Для целого m, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant m < n$, определим множество Ω_m точек $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ таких, что

$$\left.\begin{array}{ll} |u_j| \leqslant 1 & (j = 1, \ldots, m, \text{ если } m > 0), \\ |u_{m+1}| \geqslant N, \ |u_j| \geqslant 1 & (j = m+2, \ldots, n, \text{ если } n > m+1). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Буквой Ω_m будем также обозначать всякое множество, сводящееся к определенному выше множеству после соответствующей перенумерации координат.

Очевидно,

$$\Delta_N' = \sum_{m=0}^{n-1} \sum \Omega_m,$$

где вторая сумма распространяется на всевозможные различные Ω_m. Если перенумеровать все ее слагаемые ($\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$) и затем положить

$$E_1 = \Lambda_1, \ E_2 = \Lambda_2 - E_1, \ \ldots, \ E_p = \Lambda_p - \sum_1^{p-1} E_k,$$

то получим

$$\Delta_N' = \sum_1^p E_k, \quad E_k E_s = 0 \quad (k \neq s),$$

и при этом каждое E_k принадлежит к некоторому Ω_m.

Имеем пока формально (пояснения ниже)

$$\rho_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{E_k} \tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} \, d\mathbf{u}. \tag{11}$$

Оценим один из интегралов $\int\limits_{E_k}$, считая для определенности, что $E_k \subset \Omega_m$, где Ω_m определено именно неравенствами (10).

В силу равенства

$$\widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}}} = i^{(n-m)\lambda} u_{m+1}^{\lambda} \dots u_n^{\lambda} \widetilde{f} \tag{12}$$

или

$$\widetilde{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{i^{(n-m)\lambda} u_{m+1}^{\lambda} \dots u_n^{\lambda}} \widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}}}(\mathbf{u})$$

получим

$$\int\limits_{E_k} |\widetilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}}| \, d\mathbf{u} \leqslant \int\limits_{E_k} \left| \frac{1}{u_{m+1}^{\lambda} \dots u_n^{\lambda}} \widetilde{\frac{\partial^{(n-m)\lambda} f(\mathbf{u})}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}}} \right| d\mathbf{u} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{E_k} \frac{du}{u_{m+1}^{2\lambda} \dots u_n^{2\lambda}} \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{R_n} \left| \frac{\partial^{(n-m)\lambda} f}{\partial x_{m+1}^{\lambda} \dots \partial x_n^{\lambda}} \right|^2 d\mathbf{u} \right)^{1/2} \leqslant \frac{C'M}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$|\rho_N(\mathbf{x})| \leqslant \frac{CM}{N^{\lambda - \frac{1}{2}}}, \tag{14}$$

где C, так же, как и C', не зависит от M и N.

Оценки (13) показывают, что интегралы (11) сходятся, и притом абсолютно, для любого $\mathbf{x}$. Мало того, при $N \to \infty$ они, а вместе с ними и $\rho_N(\mathbf{x})$, равномерно сходятся к нулю. Таким образом, функция

$$S_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\Delta_N} \widetilde{f}(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{u}} \, d\mathbf{u}$$

равномерно сходится при $N \to \infty$. Но в то же время в силу того, что $f \in L_2$, по теореме Планшереля $S_N(\mathbf{x})$ при $N \to \infty$ стремится к $f(\mathbf{x})$ в смысле среднего квадратического, поэтому (см. лемму 1 § 15.11) $S_N(\mathbf{x})$ стремится равномерно именно к $f(\mathbf{x})$ и, следовательно,

$$\rho_N(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - S_N(\mathbf{x}). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует (9).

§ 16.11. Обобщенные периодические функции

Пусть S^* — множество бесконечно дифференцируемых периода 2π функций φ от одной переменной x. Каждую функцию $\varphi \in S^*$ можно записать в виде сходящегося к ней равномерно ее ряда Фурье (см. теорему 2 § 15.5)

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{-ikt}\, dt \tag{1}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Его можно почленно дифференцировать сколько угодно раз (см. § 15.7)

$$\varphi^{(s)}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (ik)^s c_k e^{ikx} \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

и при этом при любом натуральном s ряд справа в (2) равномерно сходится к $\varphi^{(s)}(x)$.

Будем писать

$$\varphi_n \to \varphi \quad (S^*),$$

если φ_n, $\varphi \in S^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\varphi_n^{(s)}(x) \to \varphi^{(s)}(x)$ $(n \to \infty)$ равномерно при любом целом $s \geqslant 0$.

В частности, очевидно, что если функция $\varphi \in S^*$ и $S_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx}$ — ее N-я сумма Фурье, то $S_N \to \varphi \quad (S^*)$.

Обозначим через S'^* совокупность линейных функционалов f над S^* (обобщенных функций). Обычная функция $f \in L'^*(L^*)$ при помощи равенства (без черты над φ!)

$$(f, \varphi) = \int_0^{2\pi} f(t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (\varphi \in S^*) \tag{3}$$

определяет обобщенную функцию из S'^*, которую обозначают тоже через f. Нет необходимости повторять рассуждение, приведенное в § 16.7 в случае S, о том, что два функционала вида (3), определяемые функциями f_1, $f_2 \in L'^*$, тождественно равны на S^* тогда и только тогда, если $f_1(x) = f_2(x)$ в точках непрерывности f_1 и f_2 (в случае L^* почти всюду).

Так как функции $e^{ikx}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ принадлежат к S^*, то любому функционалу $f \in S'^*$ можно привести в соответствие числа

$$c_k = \frac{1}{2\pi}(f, e^{-ikt}) \qquad (k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots),$$

называемые *коэффициентами Фурье* f.

Докажем, что имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}(f, \varphi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx}, \varphi\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k c'_{-k}, \tag{4}$$

$$2\pi c'_{-k} = (e^{ikx}, \varphi),$$

выражающее, что ряд

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{5}$$

называемый рядом Фурье обобщенной функции f, сходится к ней в смысле S'^*.

В самом деле,

$$\left(\sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx}, \varphi\right)=\sum_{-N}^{N} c_k (e^{ikx}, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}(f, e^{-ikx})(e^{ikx}, \varphi)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}(f, (e^{ikx}, \varphi)e^{-ikx})=\left(f, \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}(e^{ikx}, \varphi)e^{-ikx}\right)=$$

$$=(f, S_N(x))\to(f, \varphi)\qquad(N\to\infty),$$

потому что $S_N(x)\to\varphi(x)(S^*)$.

Заметим, что в силу ортогональных свойств функций e^{ikx}

$$(f, e^{ilx})=\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N} c_k (e^{ikx}, e^{ilx})=2\pi c_{-l}.$$

Отсюда следует, что представление функции $f\in S'^*$ в виде сходящегося (в смысле S'^*) ряда (5) с постоянными коэффициентами единственно.

Покажем, что для любой функции $f\in S'^*$ найдется зависящее от f (но не от k) натуральное λ и константа A такие, что

$$|c_k|\leqslant A|k|^{\lambda}\ (k=\pm1, \pm2, \ldots). \tag{6}$$

В самом деле, если бы это было не так, то каждому $\lambda=1, 2, \ldots$ нашлось бы k_λ такое, что

$$|c_{k_\lambda}|\geqslant|k_\lambda|^{\lambda} \text{ и } |k_1|<|k_2|<\ldots$$

Положим

$$\varphi_\lambda(x)=\frac{e^{-ik_\lambda x}}{|k_\lambda|^{\lambda}}\qquad(\lambda=1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что $\varphi_\lambda\in S^*$ и при любом неотрицательном целом s

$$\varphi_\lambda^{(s)}(x)=\frac{(-ik_\lambda)^s e^{-ik_\lambda x}}{|k_\lambda|^{\lambda}}\to 0\qquad(\lambda\to\infty)$$

равномерно; поэтому

$$\varphi_\lambda\to 0\ (S^*)$$

и

$$(f, \varphi_\lambda)\to 0\quad(\lambda\to\infty).$$

Но, с другой стороны, в силу (4) и ортогональных свойств функций e^{ikx}

$$\frac{1}{2\pi}|(f, \varphi_\lambda)| = \left|c_{k_\lambda}c'_{-k_\lambda}\right| \geqslant |k_\lambda|^\lambda \frac{1}{|k_\lambda|^\lambda} = 1 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots),$$

и мы получили противоречие.

Наоборот, если числа c_k ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) подчиняются при некоторых A, $\lambda > 0$ неравенству (6) для всех k, то функционал

$$\frac{1}{2\pi}(f, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k c'_{-k}, \quad 2\pi c'_{-k} = (\varphi, e^{ikx}) \tag{7}$$

есть обобщенная функция $f \in S'^*$. В самом деле, при $k \neq 0$

$$c'_k = \frac{1}{2\pi (ik)^s} \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\varphi^{(s)}(t)\,dt,$$

откуда

$$|c'_k| \leqslant \frac{\|\varphi^{(s)}\|_C}{k^s}, \quad \|\varphi^{(s)}\|_C = \max_t |\varphi^{(s)}(t)|$$

и при $s = \lambda + 2$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' c_k c'_k\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' A k^{\lambda - s}\|\varphi^{(s)}\|_C = \frac{A}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' k^{-2}\|\varphi^{(s)}\|_C$$

(штрих обозначает, что Σ не распространяется на $k = 0$). С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi}|c_0 c'_0| \leqslant \frac{|c_0|}{2\pi}\|\varphi\|_C.$$

Таким образом,

$$|(f, \varphi)| \leqslant B(\|\varphi^{(s)}\|_C + \|\varphi\|_C),$$

где B — константа, не зависящая от φ; поэтому если $\varphi_n \to \varphi(S^*)$, то

$$(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| = |(f, \varphi - \varphi_n)| \leqslant$$
$$\leqslant B\left(\|\varphi^{(s)} - \varphi_n^{(s)}\|_C + \|\varphi - \varphi_n\|_C\right) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

откуда $f \in S'^*$.

Конечно, функционал (7) можно записать еще в виде (5), но об этом уже говорилось выше.

Из сказанного следует, что S'^* можно определить как совокупность формальных рядов

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам (6), где A, $\lambda > 0$ — постоянные, зависящие от ряда, а значения f на $\varphi \in S^*$ определяются при помощи равенства (4). Функция $\delta(x)$ в S'^* определяется в виде ряда

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots\right).$$

Для каждой функции $\varphi \in S^*$ имеет место

$$(\delta, \varphi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{1}^{N} \cos kt\right) \varphi(t)\, dt = \lim_{N\to\infty} S_N(\varphi, 0) = \varphi(0),$$

где $S_N(\varphi, 0)$ — значение при $x=0$ N-й частичной суммы ряда Фурье φ.

Как и в случае S' (см. § 16.7, (7)), назовем производной от $F \in S'^*$ функционал F', равный

$$(F', \varphi) = -(F, \varphi').$$

Покажем, что если

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

то

$$F'(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (ik)\, c_k e^{ikx}. \tag{8}$$

Заметим, что в силу неравенства $|c_k| \leqslant A|k|^{\lambda}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ верного при некоторых A, $\lambda > 0$, верно также неравенство

$$|ikc_k| \leqslant A|k|^{\lambda+1},$$

из которого следует, как мы знаем, что ряд (8) сходится в смысле S'^* к некоторой функции $\Phi \in S'^*$. Равенство $\Phi = F'$ справедливо в силу следующих выкладок:

$$(\Phi, \varphi) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N} (ik)\, c_k e^{ikx} \varphi(x)\, dx =$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N} c_k e^{ikx} \varphi'(x)\, dx = -(F, \varphi')$$

$\left(\text{учесть, что } \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\, dx = 0\right).$

Этот результат представляет собой обобщение теоремы 1 § 15.7 о почленном дифференцировании обычных рядов Фурье.

Если функция $f \in L'^*(L^*)$, то она принадлежит и к S'^* и ее коэффициенты Фурье в обычном смысле и в смысле S'^* совпадают. Ряд Фурье функции $f \in L^*$ не обязательно сходится к ней; существует пример функции $f \in L^*$, ряд Фурье которой расходится всюду на действительной оси (пример Колмогорова, см. § 15.5). С другой стороны, из сказанного выше в этом параграфе следует, что ряд Фурье функции $f \in L'^*(L^*)$ сходится к f в смысле S'^*.

Остановимся еще на представлении свертки $\Phi * f$ двух функций Φ, $f \in L^*$ через их коэффициенты Фурье. Пусть

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ikx}, \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Тогда (см. § 18.3)

$$\psi(x) = \Phi * f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x-t) f(t)\, dt \qquad (\psi \in L^*).$$

При этом коэффициент Фурье функции ψ, если воспользоваться теоремой Фубини, может быть преобразован следующим образом:

$$\mu_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) e^{-i\nu x}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x-t) e^{-i\nu(x-t)} f(t) e^{-i\nu t}\, dt \right\} dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t}\, dt \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x-t) e^{-i\nu(x-t)}\, dx \right\} = c_\nu \lambda_\nu.$$

Следовательно,

$$\Phi * f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \lambda_k e^{ikx}. \tag{9}$$

Естественно определить свертку двух произвольных функций Φ, $f \in S'^*$ при помощи равенства (9). Ведь вместе с коэффициентами c_k и λ_k удовлетворяют неравенствам типа (6) также и их произведения $c_k \lambda_k$.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ — обычная функция периода 2π, принадлежащая $L'^*(L^*)$, то она определяет на S^* линейный функционал по формуле (3) и, следовательно, на основании сказанного выше функции f соответствует ее ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt,$$

сходящийся к ней в смысле S^*, т. е. обладающий свойством

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\varphi(t)\, dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{-n}^{n} c_k e^{ikt}\,\varphi(t)\, dt=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c'_{-k}, \quad c'_{-k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\, e^{ikt}\, dt$$

для всех $\varphi\in S^*$.

Глава 17

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§ 17.1. Дифференцируемые многообразия

Дифференцируемым k-мерным многообразием $(0<k<n)$ *в n-мерном пространстве* $R=R_n$ называется множество $S\subset R_n=R$ такое, что, какова бы ни была его точка $\mathbf{x}^0$, найдется перестановка $j_1, \ldots, j_n$ натуральных чисел $1, \ldots, n$ и прямоугольник

$$\Delta=\left\{\left|x_{j_s}-x_{j_s}^0\right|<\delta,\ s=1, \ldots, k;\ \left|x_{j_l}-x_{j_l}^0\right|<\sigma,\ l=k+1, \ldots, n\right\},$$

который вырезает из S кусок $S\Delta$, описываемый уравнениями

$$\begin{gathered} x_{j_l}=f_l\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\right),\quad l=k+1, \ldots, n;\quad \left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\right)\in\Delta', \\ \Delta'=\left\{\left|x_{j_s}-x_{j_s}^0\right|<\delta,\ s=1, \ldots, k\right\}, \end{gathered}\tag{1}$$

где f_l — непрерывно дифференцируемые на Δ' функции.

n-мерным (дифференцируемым) многообразием в R называется произвольное открытое множество $S\subset R_n$.

Если число $\delta>0$, требуемое в определении, найдено, то его, очевидно, можно как угодно уменьшить с сохранением сформулированного свойства. Можно, например, в качестве Δ взять прямоугольник

$$\Delta=\left\{\left|x_{j_s}-x_{j_s}^0\right|<\delta_s,\ s=1, \ldots, k,\ \left|x_{j_l}-x_{j_l}^0\right|<\sigma,\ l=k+1, \ldots, n\right\},$$

где $\delta_s\leqslant\delta$. Можно еще задать любое число $\sigma_0<\sigma$ и, воспользовавшись непрерывностью f_l, подобрать $\delta_0\leqslant\delta$ так, чтобы для $\left|x_{j_s}-x_{j_s}^0\right|<\delta_0$, $s=1, \ldots, k$, функции f_l отличались соответственно от $x_{j_l}^0$ менее, чем на σ_0, и тогда очевидно, что прямоугольник $\Delta^0=\left\{\left|x_{j_s}-x_{j_s}^0\right|<\delta_0,\ s=1, \ldots, k,\ \left|x_{j_l}-x_{j_l}^0\right|<\sigma_0,\ l=k+1, \ldots, n\right\}$ тоже будет удовлетворять сформулированным в определении требованиям.

Таким образом, в данном определении выражение «найдется прямоугольник Δ» можно заменить выражением «для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать прямоугольник Δ диаметра меньшего, чем ε», и определение останется эквивалентным исходному.

Система уравнений (1) есть частный случай системы

$$x_i=F_i(\mathbf{u})=F_i(u_1, \ldots, u_k),\ \mathbf{u}\in\omega,\ i=1, \ldots, n,\tag{2}$$

где ω — область, в k-мерном пространстве точек $\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_k)$, и функции F_i непрерывно дифференцируемы на ω с матрицей $\left\|\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right\|$ ранга k. Когда точка $\mathbf{u}$ пробегает ω, точка $\mathbf{x}$ пробегает некоторое множество $S \subset R$, которое естественно назвать *k-мерной поверхностью*. При этом соответствие (2) предполагается взаимно однозначным: $\omega \ni \mathbf{u} \rightleftarrows \mathbf{x} \in S$ (коротко $\mathbf{u} \rightleftarrows \mathbf{x}$ или $\omega \rightleftarrows S$).

Краткости ради будем говорить о поверхности S, *описываемой функциями или уравнениями* (2), не перечисляя каждый раз указанные их свойства.

Пусть $\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_k)$ связано с $\mathbf{u}'=(u_1', \ldots, u_k')$ при помощи взаимно однозначного непрерывно дифференцируемого отображения

$$u_j' = \varphi_j(u_1, \ldots, u_k), \quad \mathbf{u} \in \omega \rightleftarrows \omega' \ni \mathbf{u}', \tag{3}$$

имеющего на ω не равный нулю якобиан. В таком случае мы будем говорить, что отображение (3) *непрерывно дифференцируемо в обе стороны*, считая, что эти слова уже выражают взаимную однозначность отображения и неравенство нулю якобиана, ведь равный 1 якобиан перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{u}$ есть произведение якобианов перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{u}'$ и от $\mathbf{u}'$ к $\mathbf{u}$, которые, таким образом, не равны нулю.

Решая уравнения (3), получим

$$u_j = \psi_j(u_1', \ldots, u_k'), \quad \mathbf{u}' \in \omega'.$$

Подставляя u_j в (2), получим новое описание S:

$$x_i = \Phi_i(\mathbf{u}') = \Phi_i(u_1', \ldots, u_k') = F_i(\psi_1, \ldots, \psi_k), \quad \mathbf{u}' \in \omega', \quad i=1, \ldots, n,$$

где Φ_i удовлетворяют свойствам, подобным свойствам F_i.

Определяемая уравнениями (2) поверхность S не всегда есть k-мерное дифференцируемое многообразие в том смысле, как оно определено выше (см. § 6.5, рис. 6.1). Но, с другой стороны, следующая лемма дает достаточный критерий того, что S есть k-мерное дифференцируемое многообразие.

Лемма 1. *Пусть поверхность S описывается функциями F_i из (2) (с перечисленными там свойствами), где ω — ограниченная область, и функции F_i заданы не только на ω, но и на $\overline{\omega}$ и осуществляют гомеоморфизм $\overline{\omega} \rightleftarrows \overline{S}$, т. е. отображают $\overline{\omega}$ на $\overline{S}$ непрерывно и однозначно.*

Тогда S есть k-мерное дифференцируемое многообразие.

Доказательство. Пусть точка $\mathbf{x}^0 \in S$ соответствует значению $\mathbf{u}=\mathbf{u}^0$, тогда в ω существует достаточно малый открытый куб λ с центром в $\mathbf{u}^0$ такой, что на нем один из определителей k-го порядка матрицы $\left\|\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right\|$, пусть $\frac{D(x_1, \ldots, x_k)}{D(u_1, \ldots, u_k)}$, не равен нулю и разрешимы первые k уравнений (2) ($j = 1, \ldots, k$):

$$u_j = \psi_j(x_1, \ldots, x_k),\ (x_1, \ldots, x_k) \in \mu \rightleftarrows \lambda.$$

Таким образом, некоторый кусок $S' \subset S$ записывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_k),\ (x_1, \ldots, x_k) \in \mu,\ i = k+1, \ldots, n, \tag{4}$$

которые мы получим, подставив $u_i = \psi_i$ в (2).

В силу $\overline{S} \rightleftarrows \overline{\omega}$ образ компакта (замкнутого ограниченного множества) $\overline{\omega} - \lambda$ есть компакт F, не содержащий точку $\mathbf{x}^0$, а вместе с ней не содержащий некоторый прямоугольник Δ с центром в $\mathbf{x}^0$ и сторонами, параллельными осям. В силу непрерывности функций Φ_i проекцию Δ' прямоугольника Δ на подпространство $x_1, \ldots, x_k$ можно уменьшить (сохранив обозначение Δ) так, что для всех $(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta' \subset \mu$ точки $(x_1, \ldots, x_k, \Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n)$ будут принадлежать Δ. Но тогда $S\Delta$ описывается уравнениями

$$x_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_k),\ (x_1, \ldots, x_k) \in \Delta',\ i = k+1, \ldots, n.$$

Ведь описываемые ими точки $\mathbf{x}$ принадлежат $S\Delta$, других же точек S в Δ нет, потому что либо это точки вида (4), где $(x_1, \ldots, x_k) \in \mu - \Delta'$, либо точки F.

Лемма 2. *Пусть поверхность S, описываемая функциями (2) (с указанными там свойствами), содержит в себе поверхность σ, описываемую функциями*

$$x_i = \Phi_i(\mathbf{v}),\ \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in G,\ i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

(с подобными свойствами, G — область).

Тогда определенное системами (2), (5) очевидное взаимно однозначное соответствие

$$G \ni \mathbf{v} \rightleftarrows \mathbf{u} \in \omega' \subset \omega \tag{6}$$

непрерывно дифференцируемо в обе стороны и, таким образом σ описывается функциями (2)

$$x_i = F_i(\mathbf{u}),\ \mathbf{u} \in \omega',\ i = 1, \ldots, n,$$

где ω' — область.

Кроме того, если S есть k-мерное дифференцируемое многообразие, то и σ — k-мерное дифференцируемое многообразие.

В частности, если σ описывается функциями (2), где $u \in G \subset \omega$, то σ вместе с S есть k-мерное дифференцируемое многообразие.

Доказательство основано на следующем утверждении (см. § 7.18).

Пусть заданы непрерывно дифференцируемые операции

$$\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u}),\quad \mathbf{u} \in g \subset R_k,\quad \mathbf{w} = \beta(\mathbf{v}),\quad \mathbf{v} \in g' \in R_k,$$

отображающие области g и g' пространства R_k в R_k и при этом $\mathbf{u}^0 \in g$, $\mathbf{v}^0 = \alpha(\mathbf{u}^0) \in g'$. Тогда операция $\mathbf{w} = \beta\alpha(\mathbf{u})$ имеет смысл в достаточно малой окрестности $\omega \subset g$ точки $\mathbf{u}^0$, она там непрерывно дифференцируема и ее якобиан (перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{w}$) равен произведению якобианов операций α и β.

В частности, если якобиан от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{w}$ на ω не равен нулю, то не равен нулю также якобиан от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$ и образ области ω при помощи операции α есть тоже область.

Произвольной точке $\mathbf{v} \in G$ посредством (5) ставится в соответствие определенная точка $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \sigma \subset S$, которой в силу (2) по условию соответствует единственная точка $\mathbf{u} \in \omega'$. Но для нее ранг матрицы $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right\|$ равен k, и потому для некоторых различных номеров $i = i_1, \ldots, i_k$, уравнения (2) разрешимы относительно $u_1, \ldots, u_k$. В результате мы получим два следующие друг за другом непрерывно дифференцируемые отображения

$$G \ni v \to \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) \to \mathbf{u} \in \omega',$$

имеющие место не только для исходной точки $\mathbf{v}$, но и для некоторой ее окрестности.

Таким же рассуждением обнаружим, что полученной точке $\mathbf{u} \in \omega'$ при помощи двух следующих друг за другом непрерывно дифференцируемых отображений ставится в соответствие исходная точка $\mathbf{v} \in G$.

Мы доказали непрерывную дифференцируемость соответствия (6) в обе стороны, и так как по условию G — область, то и ω' — область.

Пусть S есть k-мерное дифференцируемое многообразие (2) и $\mathbf{x}^0 \in \sigma$. Как сказано в определении S, можно заново перенумеровать координаты и подобрать открытый прямоугольник Δ с центром в $\mathbf{x}^0$ так, чтобы $S\Delta$ описывалось некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_k), \quad i = k+1, \ldots, n, \quad (x_1, \ldots, x_k) \in \Delta', \tag{7}$$

где Δ' — проекция Δ на координатное подпространство $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_k)$. На основании уже доказанного имеется непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие

$$\Delta' \ni (x_1, \ldots, x_k) \rightleftarrows \mathbf{u} \in \omega' \subset \omega,$$

где ω' — некоторая область.

Таким образом, $S\Delta$ описывается не только уравнениями (7), но и уравнениями

$$x_i = F_i(\mathbf{u}), \ \mathbf{u} \in \omega', \ i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 3. *Пересечение двух k-мерных (дифференцируемых) многообразий*

$$\sigma_1 = \{\mathbf{x} : x_i = \varphi_i(\mathbf{u}),\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{u} \in U\},$$
$$\sigma_2 = \{\mathbf{x} : x_i = \psi_i(\mathbf{v}),\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{v} \in V\},$$

принадлежащих k-мерному многообразию

$$S = \{\mathbf{x} : x_i = f_i(\mathbf{w}),\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{w} \in W\},$$

есть k-мерное многообразие

$$\sigma_1\sigma_2 = \{\mathbf{x} : x_i = f_i(\mathbf{w}),\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{w} \in W_*\},\ W_* \subset W,$$

где W_*, вообще говоря, открытое множество, даже если U, V, W — области.

Доказательство. Так как $\sigma_1, \sigma_2 \subset S$, то по лемме 2

$$\sigma_1 = \{\mathbf{x} : x_i = f_i(\mathbf{w}),\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{w} \in W_1\},\quad W_1 \subset W,$$
$$\sigma_2 = \{\mathbf{x} : x_i = f_i(\mathbf{w}),\ i = 1, \ldots, n,\ \mathbf{w} \in W_2\},\ W_2 \subset W,$$

где W_1, W_2 вместе с U, V, W — области. Но тогда верна лемма, где $W_* = W_1W_2$.

Покажем теперь, что наряду с введенным в начале параграфа определением k-мерного дифференцируемого многообразия S можно дать и следующее эквивалентное ему определение: это *такое множество $S \subset R_n$, что какова бы ни была его точка $\mathbf{x}^0$ и каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется ее n-мерная окрестность Ω диаметра $d(\Omega) < \varepsilon$ такая, что $S\Omega$ описывается функциями (2) с указанными там свойствами, где только S надо заменить на $S\Omega$.* В самом деле, если в первом определении положить $\Delta = \Omega$, $\Delta' = \omega$,

$$x_{js} = u_s = F_{js}(u_1, \ldots, u_k),\quad s = 1, 2, \ldots, k,$$
$$x_{js} = f_{js}(u_1, \ldots, u_k) = F_{js}(u_1, \ldots, u_k),\quad s = k+1, \ldots, n,$$

где, как мы знаем, можно считать $d(\Delta) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, то получим систему функций F_i с указанными во втором определении свойствами.

Пусть теперь S подчиняется второму определению и точка $\mathbf{x}^0 \in S$. Тогда найдется ее окрестность Ω диаметра $d(\Omega) < 1$ такая, что $S\Omega$ описывается функциями (2) с указанными там свойствами. Будем считать, что точка $\mathbf{x}^0$ соответствует точке $\mathbf{u}^0 \in \omega$ и подберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы шар $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| \leqslant \delta$ принадлежал ω. Шаровая поверхность $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| = \delta$ отображается при помощи уравнений (2) на множество $\Gamma \subset S$, замкнутое и ограниченное. Так как оно не содержит точку $\mathbf{x}^0$, то

$$\min_{x \in \Gamma} |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = m > 0.$$

Определим теперь, пользуясь вторым определением, вторую окрестность Ω_1 точки $\mathbf{x}^0$ диаметра $d(\Omega_1) < m/2$ так, чтобы $S\Omega_1$

описывалось функциями

$$x_i = \Phi_i(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in G, \quad i = 1, \ldots, k,$$

где G — область. На основании леммы 2 $S\Omega_1$ описывается также при помощи уравнений

$$x_i = F_i(\mathbf{u}),\ \mathbf{u} \in \omega' \subset \omega, \tag{8}$$

где ω' — область.

Важно отметить, что на самом деле

$$\omega' \subset \overline{\omega}' \subset \omega. \tag{9}$$

Ведь ω' принадлежит замкнутому шару $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| \leqslant \delta$, который по определению принадлежит ω. Но тогда равенства (8) устанавливают не только взаимно однозначное соответствие $S\Omega_1 \rightleftarrows \omega'$, но и $\overline{S\Omega_1} \rightleftarrows \overline{\omega}'$, а это указывает вследствие леммы 1 на то, что $S\Omega_1$ есть k-мерное дифференцируемое многообразие (в смысле первого определения!). Можно, таким образом, указать прямоугольник $\Delta \subset \Omega_1$ с центром в $\mathbf{x}^0$, для которого выполняются свойства, фигурирующие в первом определении для $S\Omega_1$ (вместо S), но тогда и для S, потому что $S\Delta = S\Omega_1\Delta$.

Заметим, что второе определение k-мерного дифференцируемого многообразия нельзя (не в пример первому) формулировать: «Какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in S$, найдется ее n-мерная окрестность Ω такая, что...» без упоминания, что должна существовать указанная окрестность как угодно малого диаметра. Ведь если, например, функции $F_i(\mathbf{u})$, определяющие посредством (2) поверхность S, ограничены на ω, S можно поместить в некоторый куб Δ и тогда $S\Delta = S$, между тем S может и не быть k-мерным дифференцируемым многообразием.

Наконец отметим, что из эквивалентности двух указанных определений следует, что если множество S подчиняется первому определению в одной прямоугольной системе координат, то оно подчиняется ему и во всякой другой.

Лемма 4*). *Непустое пересечение k-мерных (дифференцируемых) многообразий ($i = 1, \ldots, n$)*

$$\sigma_1 = \{\mathbf{x} : x_i = \varphi_i(\mathbf{u}),\ \mathbf{u} \in \omega\},$$
$$\sigma_2 = \{\mathbf{x} : x_i = \psi_i(\mathbf{v}),\ \mathbf{v} \in g\},$$

принадлежащих k-мерному же многообразию S (все равно какому), есть k-мерное многообразие $\sigma_1\sigma_2$. Между его параметрами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имеет место непрерывно дифференцируемая в обе стороны зависимость

$$U^0 \ni \mathbf{u} \rightleftarrows \mathbf{v} \in V^0, \tag{10}$$

где U^0, V^0 — открытые множества.

*) Лемма 3 обобщается леммой 4, которая далее обобщается леммой 5.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0 \in \sigma_1\sigma_2$. Таким образом $x_i^0 = \varphi_i(\mathbf{u}^0) = \psi_i(\mathbf{v}^0) (i = 1, \ldots, n)$. Существует n-мерная окрестность Δ точки $\mathbf{x}^0$ такая, что

$$S\Delta = \{\mathbf{x} : x_i = f_i(u),\ w \in W\} \cdot \tag{11}$$

Существуют также n-мерные прямоугольники Ω_1, $\Omega_2 \subset \Delta$ с центром в $\mathbf{x}^0$ с достаточно малым диаметром такие, что

$$\sigma_1\Omega_1 = \{\mathbf{x} : x_i = \varphi_i(\mathbf{u}),\ \mathbf{u} \subset U_1 \subset \omega\}, \tag{12}$$

$$\sigma_2\Omega_2 = \{\mathbf{x} : x_i = \psi_i(\mathbf{v}),\ \mathbf{v} \in V_1 \subset g\}. \tag{13}$$

Но тогда $\sigma_1\Omega_1$, $\sigma_2\Omega_2 \subset S\Delta$, и в силу леммы 2 имеют место непрерывно дифференцируемые в обе стороны соответствия $U_1 \rightleftarrows U_1' \subset W$, $V_1 \rightleftarrows V_1' \subset W$.

Пусть $W' = U_1'V_1'$ (открытое множество). Указанные соответствия индуцируют соответствия

$$U_1 \supset U_* \rightleftarrows W' \rightleftarrows V_* \subset V_1, \tag{14}$$

где U_*, V_* — открытые множества.

Заметим еще, что уравнения

$$x_i = \varphi_i(\mathbf{u}),\ \mathbf{u} \in U_*,$$

так же как уравнения

$$x_i = \psi_i(\mathbf{v}),\quad \mathbf{v} \in V_*,$$

описывают кусок $\sigma_1\sigma_2\Omega_1\Omega_2$, что показывает ввиду произвольности точки $\mathbf{x}^0 \in \sigma_1\sigma_2$, что $\sigma_1\sigma_2$ есть k-мерное многообразие. Мы доказали также, что какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in \sigma_1\sigma_2$, $x_i^0 = \varphi_i(\mathbf{u}^0) = \psi_i(\mathbf{v}^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, можно указать открытые множества $U_* \ni \mathbf{u}^0$, $V_* \ni \mathbf{v}^0$, между точками $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ которых имеет место непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие. Но тогда, очевидно, все $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, которым соответствуют точки $\sigma_1\sigma_2$ и между которыми в силу тривиальных соображений имеется взаимно однозначное соответствие, на самом деле находятся в непрерывно дифференцируемой в обе стороны связи и, кроме того, их множества открытые.

Лемма 5. *Если σ_1, σ_2, S — произвольные k-мерные многообразия и σ_1, $\sigma_2 \in S$, то непустое пересечение $\sigma_1\sigma_2$ есть тоже k-мерное многообразие.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0 \in \sigma_1\sigma_2$. Рассуждая, как при доказательстве предыдущей леммы, определим многообразия $\sigma_1\Omega_1$, $\sigma_2\Omega_2 \subset S\Delta$ (см. (11), (12), (13)), и тогда, как там объяснено, окажется, что $\sigma_1\sigma_2\Omega_1\Omega_2$ есть k-мерное многообразие, а вместе с ним и $\sigma_1\sigma_2$.

Если k-мерное многообразие σ описывается уравнениями $(i = 1, \ldots, n)$

$$x_i = f_i(\mathbf{u}) = f_i(u_1, \ldots, u_k),\quad u \in \omega, \tag{15}$$

то говорят, что *оно задано параметрически* (через параметр $\mathbf{u}$). *Тем самым* σ (по определению) *считается ориентированным.*

Замена $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}'$ при помощи отображения

$$u_j = \psi_j(u_1', \ldots, u_k') \quad (\mathbf{u}' \in \omega', \ j = 1, \ldots, k),$$

непрерывно дифференцируемого в обе стороны на области ω', приводит к другому параметрическому описанию S:

$$x_i = F_i(\mathbf{u}') = f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k), \quad \mathbf{u}' \in \omega',$$

по определению *ориентирующему* σ *так же, как описание* (15), или *противоположным образом* в зависимости от того, будет ли якобиан перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{u}'$ положительным или отрицательным.

k-мерное многообразие S *называется ориентируемым, если все какие бы то ни было описания S (описания его частичных многообразий) можно разбить на два класса $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ так, что если два описания с параметрами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ принадлежат одному и тому же классу и многообразия σ_1 и σ_2, которые они описывают, пересекаются, то якобиан перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{u}'$ на $\sigma_1\sigma_2$ положителен.*

Описания, принадлежащие $\mathfrak{M}_+$, *определяют одну ориентацию S, а описания, принадлежащие $\mathfrak{M}_-$,— другую ориентацию S, противоположную первой.* Но приходится считаться с тем фактом, что существуют k-мерные (дифференцируемые) многообразия, не ориентируемые, т. е. такие, что все их описания нельзя разбить на два класса $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ с указанными свойствами (лист Мёбиуса, $n = 3$, $k = 2$).

Описание (через параметр $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$) можно перевести из одного из классов $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$ в другой путем изменения знака у u_1, т. е. при помощи подстановки $u_1' = -u_1$, $u_2' = u_2, \ldots, u_k' = u_k$.

Заметим, что k-мерное ориентированное дифференцируемое многообразие L_k при $k = 1$ есть очевидно*) гладкая ориентированная кривая (см. § 6.5), а при $k = 2$, $n = 3$ определение L_k полностью согласуется с определением ориентированной гладкой поверхности. В самом деле, все описания $\mathbf{r}(u, v) = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k}$ гладкой поверхности S (двумерного дифференцируемого многообразия), принадлежащие одному и тому же классу $\mathfrak{M}_+$, таковы, что если по ним единым способом вычислять вектор

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

единичной нормали в точке $\mathbf{x} = \mathbf{r}(u, v)$, то результат не зависит от того, будем ли мы вычислять $\mathbf{n}$ через праметры (u, v) или через другие, связанные с ними непрерывно дифференцируемым в обе стороны отображением параметры (u', v'), ведь якобиан

*) Наоборот, гладкая кривая может не быть дифференцируемым многообразием L_1 (см. рассуждения к рис. 6.1).

$\frac{D(u, v)}{D(u', v')} > 0$. Но тогда единичная нормаль $\mathbf{n}(x)$ непрерывно зависит от $\mathbf{x}$ и поверхность S ориентирована в смысле определения § 7.20. Если же применить эти рассуждения к описаниям, составляющим класс $\mathfrak{M}_-$, то придем к противоположной ориентации S в смысле § 7.20.

Пусть G есть область в пространстве R_n точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Уравнения

$$x_i = u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in G,$$

где, таким образом, x_i являются не только координатами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, но и параметрами, описывают определенно ориентированное n-мерное многообразие S. В свою очередь уравнения

$$x_i = f_i(w_1, \ldots, w_n), \ \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \omega \rightleftarrows G,$$

где имеет место непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие $\mathbf{x} \rightleftarrows \mathbf{w}$, определяет то же ориентированное многообразие S или ориентированное противоположно в зависимости от того, будет ли якобиан перехода положительным или отрицательным.

Полезна лемма

Лемма 6. *Пусть для k-мерного многообразия S существует класс $\mathfrak{M}$ его описаний*

$$x_i = f_i(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in w, \quad i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

со следующими свойствами.

1) *Многообразия $\sigma \subset S$, определяемые описаниями из класса $\mathfrak{M}$, покрывают S.*

2) *Любые два описания из $\mathfrak{M}$, определяющие многообразия σ, $\sigma' \subset S$, с непустым пересечением, таковы, что их параметры $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ на $\sigma\sigma'$ переходят друг в друга с положительным якобианом* (см. лемму 4).

Тогда S ориентируемо и классы $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$, на которые делятся все описания S, можно определить так, что будет $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_+$. Этим $\mathfrak{M}$ определяет ориентацию S.

Доказательство. Пусть дано описание (16) (через параметр $\mathbf{u}$) некоторого многообразия $\sigma \subset S$ и точка $\mathbf{x}^0 \in \sigma$. В силу свойства 1) класса $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ найдется описание σ', пусть выражаемое через параметр $\mathbf{v}$, покрывающее $\mathbf{x}^0$. Отнесем σ к $\mathfrak{M}_+$ или $\mathfrak{M}_-$ в зависимости от того, будет ли на $\sigma\sigma'$ в малой окрестности $\mathbf{x}^0$ якобиан перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$ положительным или отрицательным. Однако надо убедиться в том, что высказанное правило не содержит противоречий, т. е. оно не зависит от точки $\mathbf{x}^0 \in \sigma$ и описания $\sigma' \in \mathfrak{M}$, покрывающего $\mathbf{x}^0$.

Пусть для определенности в малой окрестности рассматриваемой точки $\mathbf{x}^0$ якобиан перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$ положительный, т. е., согласно высказанному правилу $\sigma \in \mathfrak{M}_+$. Но точка $\mathbf{x}^0$ может быть покрыта и другим многообразием $\sigma'' \in \mathfrak{M}$, выражаемым пусть через параметр $\mathbf{w}$. Так как на $\sigma'\sigma''$ переход от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{w}$ имеет положительный якобиан, то якобиан перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{w}$ (равный произведению якобианов перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$ и от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{w}$) положительный, и наше правило приводит к тому же результату $\sigma \in \mathfrak{M}$. Условимся далее через σ_x обозначать какое-либо покрывающее $\mathbf{x}$ многообразие, описание которого принадлежит к $\mathfrak{M}$, а его параметр — через $\mathbf{v}_x$. Пусть теперь $\mathbf{y}^0 \in \sigma$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^0$. Предположим, что наше правило некорректно и в малой окрестности $\mathbf{y}^0$ якобиан перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}_{y^0}$ отрицательный. Соединим $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ непрерывной кривой $\Gamma \subset \sigma$ $(\mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}(1) = \mathbf{y}^0)$. Тогда должно найтись t_0 $(0 < t_0 < 1)$ такое, что в любой его близости имеются значения t', t'' такие, что в малых окрестностях точек $\mathbf{x}(t')$, $\mathbf{x}(t'')$ якобианы перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}_{x(t')}$ и к $\mathbf{v}_{x(t'')}$ имеют противоположные знаки. Но это противоречит тому факту, что в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}(t_0)$ наш якобиан должен сохранять знак. Этим доказано, что высказанное правило корректно.

Но тогда и переход $\mathbf{u}' \to \mathbf{u}''$ имеет положительный якобиан. Аналогичное рассуждение можно провести и для $\mathfrak{M}_-$. Очевидно также, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_+$, и всякое локальное описание S принадлежит одному и только одному из классов $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$.

Отметим еще, что *ориентированное многообразие можно* очевидно *еще определить как многообразие S, для которого существует класс $\mathfrak{M}$ его описаний, удовлетворяющих условиям* 1), 2) *леммы* 6.

Замечание. Любое замкнутое ограниченное дифференцируемое многообразие S (например, окружность, поверхность шара или эллипсоида) в целом не описывается уравнениями вида (2) (подразумевается взаимная однозначность $S \rightleftarrows \omega$!). В самом деле, пусть S описывается уравнениями вида (2). Рассмотрим последовательность точек $\mathbf{u}^\nu \in \omega$, стремящуюся к некоторой точке $\mathbf{u}^0$ границы γ области ω или, если γ пусто ($\omega = R_k$), стремящуюся в бесконечность ($|\mathbf{u}^\nu| \to \infty$). Так как S ограничена и замкнута, найдется подпоследовательность этой последовательности точек, обозначаемых снова через $\mathbf{u}^\nu$, такая, что для соответствующих при отображении (2) точек $\mathbf{x}^\nu \in S$ имеет место $\mathbf{x}^\nu \to \mathbf{x}^0$, где $\mathbf{x}^0$ — некоторая точка S, которая, таким образом, соответствует при помощи (2) определенной точке $\mathbf{u}' \in \omega$. Пусть $V \in \omega$ — замкнутый шар с центром в $\mathbf{u}'$. При помощи (2) он непрерывно отображается на замкнутое множество $\sigma \subset S$, и следовательно, это отображение непрерывно также в обратную сторону (см. § 12.20, теорема 1), и из того, что $\mathbf{x}^\nu \to \mathbf{x}^0$, следует, что $\mathbf{u}^\nu \to \mathbf{u}'$, т. е. $\mathbf{u}' = \mathbf{u}^0$. Но этого не может быть, так как $\mathbf{u}^0$ — граничная точка ω или бесконечно удаленная точка, а $\mathbf{u}'$ — внутренняя (конечная) точка ω.

§ 17.2. Край дифференцируемого многообразия и его ориентация

Если E — множество в пространстве R_n, то условимся через $E^{(k)}$ обозначать его проекцию на координатное подпространство $(x_1, \ldots, x_k)$.

Теорема 1. *Если $\Gamma \subset S$, где Γ, S — соответственно k- и $(k+1)$-мерные дифференцируемые многообразия и $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, то можно перенумеровать координаты и подобрать прямоугольник*

$$\Delta = \{ |x_i - x_i^0| < \delta_1,\ i = 1, \ldots, k;\ |x_{k+1} - x_{k+1}^0| < \delta_2; \\ |x_j - x_j^0| < \sigma,\ j = k+2, \ldots, n\}, \tag{1}$$

так, чтобы $S\Delta$ описывалось непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_j = f_j(x_1, \ldots, x_{k+1}),\ j = k+2, \ldots, n,\ (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \Delta^{(k+1)}, \tag{2}$$

а $\Gamma\Delta$ — непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\begin{gathered} x_{k+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_k),\ (x_1, \ldots, x_k) \in \Delta^{(k)}, \\ x_j = f_j(x_1, \ldots, x_k, \varphi(x_1, \ldots, x_k)),\ j = k+2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3}$$

Доказательство. Рассматриваемые функции будут непрерывно дифференцируемы, и мы их будем просто называть функциями.

Зададим точку $\mathbf{x}^0 \in \Gamma \subset S$. Будем предполагать, что многообразие S в окрестности $\mathbf{x}^0$ проектируется (взаимно однозначно) на часть подпространства R_{k+1} точек $(x_1, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0)$, чего можно достичь соответствующей перенумерацией координат. Ниже будет доказано, что так как $\Gamma \subset S$, то Γ необходимо проектируется на k-мерное координатное подпространство подпространства R_{k+1}. Заново перенумеровывая первые $k+1$ координат, можно сделать так, что это будет подпространство R_k точек $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$.

Итак, существует прямоугольник $\Delta_1 = \{ |x_j - x_j^0| < \delta_1, j = 1, \ldots \ldots, k; |x_{k+1} - x_{k+1}^0| < \mu;\ |x_j - x_j^0| < \nu,\ j = k+2, \ldots, n\}$ такой, что кусок $S\Delta_1$ описывается уравнениями

$$x_j = f_j(x_1, \ldots, x_{k+1}),\ j = k+2, \ldots, n,\ (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \Delta_1^{(k+1)} \tag{4}$$

Будем пользоваться замечанием, сделанным в начале § 17.1 сразу же после определения k-мерного многообразия, в силу которого, коль скоро числа δ_1, μ найдены, их можно как угодно уменьшить *), а уравнения (4) все же будут описывать $S\Delta_1$.

---

*) Уменьшая δ_1, μ, если это нужно, мы часто будем позволять себе сохранять их обозначение δ_1, μ.

Существует также в силу определения Г прямоугольник

$$\Delta_2 = \{ |x_j - x_j^0| < \delta_1,\ j = 1, \ldots, k;\ |x_j - x_j^0| < \sigma,\ j = k+1, \ldots, n\},$$

принадлежащий Δ_1 (т. е. $\sigma \leqslant \mu$, ν, а δ_1 в Δ_1, возможно, потребуется соответственно уменьшить), такой, что $\Gamma\Delta_2$ описывается уравнениями

$$x_{k+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_k), \quad x_j = F_j(x_1, \ldots, x_k),$$
$$j = k+2, \ldots, n, \ (x_1, \ldots, x_k) \in \Delta_2^{(k)}.$$

Так как $\Gamma\Delta_2 \subset S\Delta_1$, то

$$F_j(x_1, \ldots, x_k) = f_j(x_1, \ldots, x_k, \varphi),$$
$$(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta_2^{(k)}, \ \varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k),$$

и уравнения $\Gamma\Delta_2$ можно записать в виде

$$x_{k+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_k), \quad (x_1, \ldots, x_k) \in \Delta_2^{(k)},$$
$$x_j = f_j(x_1, \ldots, x_k, \varphi), \quad j = k+2, \ldots, n.$$

Теперь, пользуясь указанным замечанием, вводим прямоугольник $\Delta \subset \Delta_2$ (см. (1)) так, что $S\Delta$ описывается уравнениями (2), где f_j — уже найденные выше (для Δ_1) функции. При этом, возможно, δ_1 в Δ_1 и Δ_2 придется уменьшить; кроме того, δ_1 выбираем так, чтобы

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_k) - x_{k+1}^0| < \delta_2, \ (x_1, \ldots, x_k) \in \Delta^{(k)}. \tag{5}$$

Итак, $S\Delta$ описывается уравнениями (2). Пусть теперь точка $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma\Delta$, тогда $(x_1, \ldots, x_k) \in \Delta^{(k)} \subset \Delta_2^{(k)}$, $x \in \Gamma\Delta_2$ и $\mathbf{x}$, следовательно, записывается в виде

$$x_{k+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_k), \tag{6}$$
$$x_j = f_j(x_1, \ldots, x_k, \varphi), \quad (x_1, \ldots, x_k) \in \Delta^{(k)}, \quad j = k+2, \ldots, n.$$

Наоборот, если точка $\mathbf{x}$ записывается в виде (6), то в силу (5) $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \Delta^{(k+1)}$, и потому $\mathbf{x} \in S\Delta$. С другой стороны, $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_k) \in \Delta^{(k)} \subset \Delta_2^{(k)}$, и потому $x \in \Gamma\Delta_2 \subset \Gamma$. Итак, $x \in \Gamma S\Delta = \Gamma\Delta$.

Перейдем теперь к доказательству того, что если $\Gamma \subset S$, то в окрестности точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ многообразие Γ заведомо проектируется на некоторое k-мерное подпространство того $(k+1)$-мерного подпространства, на которое проектируется S. Пусть в некоторой окрестности $x^0 \in \Gamma$ многообразие S описывается функциями

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_{k+1}), \quad i = k+2, \ldots, n, \tag{7}$$

а многообразие Γ — функциями

$$x_j = \varphi_j(u_1, \ldots, u_k), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

с рангом матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_l} \right\|$, равным k. Так как $\Gamma \subset S$, то в малой окрестности точки $\mathbf{u}^0$

$$x_s = \varphi_s(\mathbf{u}), \quad s = 1, \ldots, k+1,$$

$$x_j = \varphi_j(\mathbf{u}) \equiv f_j(\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_{k+1}(\mathbf{u})), \quad j = k+2, \ldots, n.$$

Поэтому

$$\left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_l} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \ldots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial u_1} \sum\limits_{s=1}^{k+1} \frac{\partial f_{k+2}}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1} \ldots \sum\limits_{s=1}^{k+1} \frac{\partial f_n}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} \ldots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial u_k} \sum\limits_{s=1}^{k+1} \frac{\partial f_{k+2}}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_k} \ldots \sum\limits_{s=1}^{k+1} \frac{\partial f_n}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial u_k} \end{matrix} \right\|.$$

Так как ранг этой матрицы равен k, то легко видеть, рассуждая от противного, что ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \ldots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial u_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} \ldots \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial u_k} \end{matrix} \right\|,$$

тоже равен k и существует не равный нулю порожденный ею определитель порядка k. Пусть это будет определитель $\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_l} \right|$, j, $l = 1, \ldots, k$. Но тогда в малой окрестности $\mathbf{u}^0$ первые k уравнений (8) можно решить относительно $u_1, \ldots, u_k$, что показывает, что многообразие Γ в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ проектируется на координатное подпространство R_k точек $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$.

Краем k-мерного многообразия L_k называется множество $\partial L_k = \bar{L}_k - L_k$. Конечно, если L_k замкнуто, то оно не имеет края.

Теорема 2. *Пусть L_{k+1} и L'_{k+1} — $(k+1)$-мерные дифференцируемые многообразия, $\bar{L}_{k+1} \subset L'_{k+1}$, L'_{k+1} связно и L_{k+1} имеет непустой связный край $\partial L_{k+1} = L_k$, являющийся k-мерным многообразием.*

Тогда, какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in L_k$, найдется перестановка $j_1, j_2, \ldots, j_n$ натуральных чисел $1, \ldots, n$ и прямоугольник

$$\Delta = \{ |x_{j_s} - x^0_{j_s}| < \delta_1, \ s = 1, \ldots, k; \ |x_{j_{k+1}} - x^0_{j_{k+1}}| < \delta_2,$$
$$|x_{j_s} - x^0_{j_s}| < \delta, \ s = k+2, \ldots, n\}$$

такие, что кусок $L'_{k+1}\,\Delta$ описывается непрерывно дифференцируемыми на $\overline{\Delta^{(k+1)}}$ функциями

$$x_{j_s} = f_{j_s}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k+1}}), \ (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k+1}}) \in \Delta^{(k+1)},$$
$$s = k+2, \ldots, n, \qquad (9)$$

и кусок $L_k\Delta$ — теми же функциями, но где

$$x_{j_{k+1}} = \varphi(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \ (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) \in \Delta^{(k)} \tag{10}$$

— непрерывно дифференцируемая на $\overline{\Delta^{(k)}}$ функция.

При помощи уравнений (9) точки $\Delta^{(k+1)}$, принадлежащие области

$$\Delta_+^{(k+1)} = \left\{x_{j_{k+1}} > \varphi(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \ (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) \in \Delta^{(k)}\right\},$$

отображаются целиком на один из кусков $L_{k+1}\Delta$ или $(L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Delta$, а точки $\Delta^{(k+1)}$, принадлежащие области

$$\Delta_-^{(k+1)} = \left\{x_{j_{k+1}} < \varphi(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}), \ (x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}) \in \Delta^{(k)}\right\},$$

— на другой из этих кусков.

Доказательство. Так как L_k есть k-мерное многообразие, принадлежащее $(k+1)$-мерному многообразию L'_{k+1}, то первая часть теоремы есть теорема 1, записанная в несколько другой форме. Остается доказать вторую часть, где используется то обстоятельство, что L_k есть край L_{k+1} и L_k и L'_{k+1} — связные многообразия.

Прямоугольник $\Delta^{(k+1)}$ разрезается поверхностью (10) на две области, не содержащие точек, отображаемых при помощи преобразований (10) в L_k. Следовательно, каждая область отображается целиком на один и только один кусок $L_{k+1}\Delta$, $(L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Delta$. При этом не может случиться, что обе эти области отображаются на кусок $(L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Delta$, ведь тогда $L_{k+1}\Delta$ было бы пустым множеством и в Δ не было бы точек L_k. Не может также случиться, что обе области отображаются на $L_{k+1}\Delta$. В самом деле, назовем точку $\mathbf{x}^0 \in L_k$ *регулярной*, если для нее разные области $\Delta_+^{(k+1)}$, $\Delta_-^{(k+1)}$ отображаются на разные куски $L_{k+1}\Delta$, $(L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Delta$. Наша задача доказать, что множество всех нерегулярных точек пусто. Начнем с того, что заметим, что не могут существовать на L_k две точки $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$ такие, что одна из них регулярная, а другая — нет, ведь вследствие связности L_k существует принадлежащая L_k соединяющая $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ кривая Γ, и тогда метод дедекиндова сечения на Γ привел бы к существованию на Γ точки $\mathbf{z}^0$, в любой малой окрестности которой имелись бы как регулярная, так и нерегулярная точки. Но это очевидно невозможно. Допустим теперь, что все точки L_k не регулярны. Зададим две точки $\mathbf{x}^0 \in L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1}$ и $\mathbf{y}^0 \in L_{k+1}$ и, пользуясь связностью L'_{k+1}, соединим их принадлежащей L'_{k+1} непрерывной кривой

$$\mathbf{x}(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \ \mathbf{x}(1) = \mathbf{y}^0.$$

Применив метод дедекиндова сечения, найдем наибольшее значение $t=t_0$, при котором $x(t)\in L'_{k+1}-\bar{L}_{k+1}$, $t<t_0$. Точка $\mathbf{z}^0=\mathbf{x}(t_0)$, очевидно, принадлежит L_k, она не регулярна и для нее обе области $\Delta_+^{(k+1)}$, $\Delta_-^{(k+1)}$ на основании сказанного выше должны отобразиться на $L_{k+1}\Delta$, т. е. в окрестности $\mathbf{z}^0$ не должно быть точек $(L'_{k+1}-\bar{L}_{k+1})\Delta$, но такие точки для $t<t_0$, близких к t_0, есть, и мы пришли к противоречию.

Итак, любая точка $\mathbf{x}^0\in L_k$ регулярна, т. е. области $\Delta_+^{(k+1)}$ и $\Delta_-^{(k+1)}$ при помощи преобразований (9) отображаются на разные куски $L_{k+1}\Delta$, $(L'_{k+1}-\bar{L}_{k+1})\Delta$.

Замечание. Пользуясь тем, что φ непрерывна и удовлетворяет равенству $x^0_{j_{k+1}}=\varphi\left(x^0_{j_1},\ldots,x^0_{j_k}\right)$ и что диаметр $\Delta^{(k)}$ можно как угодно уменьшить, легко заключим, что существует такое $\lambda>0$, что область $(\Lambda=\Lambda^{(k+1)})$

$$\Lambda=\left\{\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)\in\Delta^{(k)},\ \varphi\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)-\lambda<x_{j_{k+1}}<\right.$$
$$\left.<\varphi\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)+\lambda,\ \left|x_{j_s}-x^0_{j_s}\right|<\delta,\quad s=k+2,\ldots,n\right\}\tag{11}$$

вырезает из L'_{k+1} кусок $L'_{k+1}\Lambda$, описываемый функциями $(s=k+2,\ldots,n)$

$$x_{j_s}=f_{j_s}\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_{k+1}}\right),\ \left(x_{j_1},\ldots,x_{j_{k+1}}\right)\in\Lambda^{(k+1)}$$

При этом поверхность (10) разрезает $\Lambda^{(k+1)}$ на две части

$$\Lambda_+^{(k+1)}=\left\{\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)\in\Delta^{(k)},\ \varphi\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)\leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant x_{j_{k+1}}<\varphi\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)+\lambda\right\},\tag{12}$$
$$\Lambda_-^{(k+1)}=\left\{\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)\in\Delta^{(k)},\right.$$
$$\left.\varphi\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)-\lambda\leqslant x_{j_{k+1}}<\varphi\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right)\right\}.$$

Одна из них отображается посредством (9) на $\bar{L}_{k+1}\Lambda$, а другая — на $\left(L'_{k+1}-L_{k+1}\right)\Lambda$.

Если $\Lambda_+^{(k+1)}$ отображается на $\left(L'_{k+1}-L_{k+1}\right)\Lambda$, то введем переменные

$$u_1=x_{j_1},\ldots,u_k=x_{j_k},\quad u_{k+1}=x_{j_{k+1}}-\varphi\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}\right),\tag{13}$$

связанные непрерывно дифференцируемо в обе стороны с $\left(x_{j_1},\ldots,x_{j_{k+1}}\right)$. Тогда функции

$$\left.\begin{aligned}&x_{j_s}=F_{j_s}(u_1,\ldots,u_{k+1})=u_s,\quad s=1,\ldots,k,\\&x_{j_{k+1}}=F_{j_{k+1}}(u_1,\ldots,u_{k+1})=u_{k+1}+\varphi(u_1,\ldots,u_k),\\&x_{j_s}=F_{j_s}(u_1,\ldots,u_{k+1})=f_{j_s}(u_1,\ldots,u_k,\ u_{k+1}+\varphi(u_1,\ldots,u_k)),\\&\qquad\qquad s=k+2,\ldots,n,\\&|u_s-u_s^0|\leqslant\delta_1,\quad s=1,\ldots,k,\ |u_{k+1}|\leqslant\lambda\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

описывают $L'_{k+1}\Lambda$, при этом точки $(u_1, \ldots, u_{k+1})$ с координатами $u_{k+1} > 0$, $u_{k+1} < 0$, $u_{k+1} = 0$ преобразуются соответственно в $(L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Lambda$, $L_{k+1}\Lambda$, $L_k\Lambda$.

Если $\Lambda_+^{(k+1)}$ отображается на $L_{k+1}\Lambda$, то к тем же результатам мы придем, если в уравнениях (13), (14) заменим u_{k+1} на $-u_{k+1}$.

Наконец, заметим, что замена параметра u_1 на $-u_1$ не изменяет очевидно эти результаты, т. е. после такой замены точки $(u_1, \ldots, u_{k+1})$ с $u_{k+1} > 0$ по-прежнему будут переходить в $(L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Lambda$. Этим доказана теорема.

Теорема 3. *При условиях теоремы 2 какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in L_k$, найдется ее окрестность (n-мерная) Λ такая, что $L'_{k+1}\Lambda$ описывается непрерывно дифференцируемыми функциями ($i = 1, \ldots, n$)*

$$x_i = F_i(\mathbf{u}) = F_i(u_1, \ldots, u_{k+1}), \quad \mathbf{u} \in \omega, \tag{15}$$

где ω — область в пространстве R_{k+1} точек $\mathbf{u}$, а $L_k\Lambda$ описывается уравнениями

$$x_i = F_i(u_1, \ldots, u_k, 0), \qquad (u_1, \ldots, u_k) \in \lambda, \tag{16}$$

где λ — сечение ω плоскостью $u_{k+1} = 0$ в R_{k+1}, делящее ω на две непустые области. При помощи уравнений (15) точки $\mathbf{u} \in \omega$ с координатой $u_{k+1} > 0$ или $u_{k+1} < 0$ отображаются соответственно на $(L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Lambda$, $L_{k+1}\Lambda$.

Наконец, если L'_{k+1} — ориентированное многообразие, то можно функции F_i с указанными свойствами задать так, чтобы они определяли ориентацию L'_{k+1}.

Последнее утверждение поясняется так: если функции F_i, полученные следуя указанным процессам, определяют ориентацию, противоположную L'_{k+1}, то достаточно в них заменить u_1 на $-u_1$.

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы 2 (или, что все равно, теоремы 3), то из того, что L'_{k+1} ориентируемо, следует ориентируемость L_k и существует правило согласования этих ориентаций.*

Доказательство. Каждой точке $\mathbf{x}^0 \in L_k$ приведем в соответствие ее окрестность Λ и описывающие $L'_{k+1}\Lambda$ (вместе с ориентацией) функции F_i так, чтобы удовлетворялись условия теоремы 3. Уравнения (16) представляют собой некоторое описание многообразия L_k, пока неориентированного.

Совокупность всех описаний вида (16) обозначим через $\mathfrak{M}$. Так как с каждой точкой $\mathbf{x}^0 \in L_k$ связано хотя бы одно описание L_k вида (16), определяющее многообразие $L_k\Lambda$, покрывающее $\mathbf{x}^0$, то $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 1) леммы 6 предыдущего параграфа. Чтобы доказать, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет также условию 2) этой леммы, рассмотрим наряду с (16) другое какое-либо описание L_k, принадлежащее $\mathfrak{M}$. Таким образом, мы считаем, что Ω — некоторая

n-мерная окрестность точки $\mathbf{y}^0 \in L_k$, такая, что функции ($i = 1, \ldots, n$)

$$x_i = \Phi_i(v_1, \ldots, v_{k+1}), \ (v_1, \ldots, v_{k+1}) \in \varkappa$$

определяют ориентированное многообразие $L'_{k+1}\Omega$, а функции

$$x_i = \Phi_i(v_1, \ldots, v_k, 0), \ (v_1, \ldots, v_k) \in \mu$$

определяют $L_k\Omega$, где μ — сечение $\varkappa$ плоскостью $v_{k+1} = 0$. При этом положительным v_{k+1} соответствуют точки $x \in (L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Lambda$. Предположим, что многообразия $L_k\Lambda$ и $L_k\Omega$ имеют непустое пересечение $L_k\Lambda\Omega$. На нем в силу леммы 4 предыдущего параграфа имеет место непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие

$$U_k^0 \ni (u_1, \ldots, u_k) \rightleftarrows (v_1, \ldots, v_k) \in V_k^0,$$

где U_k^0, V_k^0 — открытые множества. Но тогда многообразия $L'_{k+1}\Lambda$ и $L'_{k+1}\Omega$ тоже имеют непустое пересечение $L'_{k+1}\Lambda\Omega$, на котором в свою очередь имеет место непрерывно дифференцируемое в обе стороны соответствие

$$U_{k+1}^0 \ni (u_1, \ldots, u_{k+1}) \rightleftarrows (v_1, \ldots, v_{k+1}) \in V_{k+1}^0.$$

Заметим, что в данном случае при $v_{k+1} = 0$, или, что все равно, $u_{k+1} = 0$, $\dfrac{\partial v_{k+1}}{\partial u_j} = 0$ $(j = 1, \ldots, k)$, и потому при $u_{k+1} = 0$

$$\frac{D(v_1, \ldots, v_{k+1})}{D(u_1, \ldots, u_{k+1})} = \frac{\partial v_{k+1}}{\partial u_{k+1}} \frac{D(v_1, \ldots, v_k)}{D(u_1, \ldots, u_k)}. \tag{17}$$

Но якобиан слева — положительный, потому что функции $F_i(u_1, \ldots, u_{k+1})$ и $\Phi_i(v_1, \ldots, v_{k+1})$ определяют ориентированные куски L'_{k+1}, и на их пересечении переход от $(u_1, \ldots, u_{k+1})$ к $(v_1, \ldots, v_{k+1})$ имеет положительный якобиан. Множитель $\dfrac{\partial v_{k+1}}{\partial u_{k+1}}$ — тоже положительный для ($u_{k+1} = 0$), потому что параметры $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ так подобраны, что при $u_{k+1} > 0$ $\mathbf{x} \in (L'_{k+1} - \overline{L}_{k+1})\Lambda\Omega$, но тогда и $v_{k+1} > 0$. В таком случае якобиан в правой части (17) — положительный, и мы доказали, что описания вида (16) удовлетворяют условию 2) леммы 6 § 17.1 (параметры таких описаний на пересечениях многообразий, которые они описывают, переходят друг в друга с положительным якобианом).

Итак, описания вида (16) образуют согласно терминологии леммы 6 предыдущего параграфа класс $\mathfrak{M}$. Следовательно, L_k — ориентируемое многообразие и в качестве определяющего его ориентацию можно взять класс $\mathfrak{M}_+$. Метод его построения дан в указанной лемме ($\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_+$).