— счетная сумма кубов, пересекающихся попарно разве что по своим границам.

По теореме 3 функцию F можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль и в видоизмененном виде записать при помощи равенств

$$\begin{gathered} F(\mathrm{x}) = F(x_1, \mathrm{y}) = \lambda_k(\mathrm{y}) + \int\limits_{a_1^{(k)}}^{x_1} f(t, \mathrm{y})\,dt \qquad (k = 1, 2, \ldots), \\ \mathrm{x} = (x_1, \mathrm{y}) \in \Delta_k, \quad y \in \Delta_k' - e_k, \quad |e_k|_* = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где $\lambda_k(\mathrm{y}) \in L(\Delta_k')$ — единственная с точностью до $(n-1)$-мерной меры нуль конечная функция. Так как ($(n-1)$-мерная) мера множества $\sum\limits_1^\infty e_k$ равна нулю, то равенства (17) определяют (видоизмененную) функцию F почти всюду на G. Непосредственно видно, что F для указанных y по x_1 абсолютно непрерывна, по в пределах каждого куба Δ_k. Покажем, что множества e_k могут быть увеличены с сохранением свойства $|e_k|_* = 0$ так, что определяемая равенствами (17) функция F по x_1 будет локально абсолютно непрерывна на G для всех $\mathrm{y} \in G' - e$, $e = \sum\limits_1^\infty e_k$ ($|e|_* = 0$).

Рассмотрим два куба Δ_k и Δ_l, имеющие в направлении x_1 общую границу, представляющую собой некоторый прямоугольник

$$\Delta' = \{\alpha_j \leqslant x_j \leqslant \beta_j; \quad j = 2, \ldots, n\}.$$

Будем считать, что Δ_l находится правее Δ_k. Нас будут интересовать те части $\Delta_* \subset \Delta_k$, $\Delta_{**} \subset \Delta_l$, которые имеют указанную общую проекцию Δ'. Итак, пусть

$$\begin{gathered} \Delta_* = [\alpha, \beta] \times \Delta', \quad \Delta_{**} = [\beta, \gamma] \times \Delta', \\ \alpha = a_1^{(k)}, \quad \beta = b_1^{(k)} = a_1^{(l)}, \quad \gamma = b_1^{(l)}, \quad \alpha < \beta < \gamma. \end{gathered}$$

Имеем

$$\begin{gathered} F(x_1, \mathrm{y}) = \lambda_k(\mathrm{y}) + \int\limits_{\alpha}^{x_1} f(t, \mathrm{y})\,dt \text{ на } \Delta_*, \quad \mathrm{y} \in \Delta' - e_k \\ F(x_1, \mathrm{y}) = \lambda_l(\mathrm{y}) + \int\limits_{\beta}^{x_1} f(t, \mathrm{y})\,dt \text{ на } \Delta_{**}, \quad \mathrm{y} \in \Delta' - e_l. \end{gathered} \tag{18}$$

Но можно также, применяя теорему 3 к прямоугольнику $\Delta = \Delta_* + \Delta_{**}$, установить существование функции F_0, равной F

почти всюду на Δ, и функции $\lambda(y) \in L(\Delta')$ такой, что

$$F_0(x_1, y) = \lambda(y) + \int_\alpha^{x_1} f(t, y)\, dt \text{ на } \Delta, \quad y \in \Delta' - e_{kl}, \tag{19}$$

$$|e_{kl}|_* = 0.$$

Так как $F = F_0$ почти всюду на Δ_*, то $\lambda_k(y) = \lambda(y)$ почти всюду на Δ' в смысле $(n-1)$-мерной меры, и так как $F_0 = F$ почти всюду на Δ_{**}, то почти всюду на Δ' в смысле $(n-1)$-мерной меры выполняется равенство

$$\lambda_l(y) = \lambda(y) + \int_\alpha^\beta f(t, y)\, dt.$$

Это показывает, что e_{kl} можно увеличить, сохраняя меру $[e_{kl}]_*$, так что для всех $y \in \Delta' - e_{kl}$ имеют место тождества $F = F_0$ на Δ_*, $F = F_0$ на Δ_{**}, и таким образом, функция F для указанных y вместе с F_0 абсолютно непрерывна на Δ по x_1.

Пусть теперь

$$e = \sum e_{kl}, \quad |e|_* = 0,$$

где сумма распространена на всевозможные пары (k, l), для которых Δ_l граничит с Δ_k справа от Δ_k. Нетрудно видеть, что для всех $y \in G' - e$ наша функция F по x_1 на G локально абсолютно непрерывна.

Отметим, что так как теоремы 2, 3, 6 дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция f была обобщенной производной по x_1 от F на G, то эти условия могут быть взяты за исходное определение обобщенной функции.

Мы определили обобщенную производную $\frac{\partial F}{\partial x_1}$. По аналогии определяются обобщенные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ $(j = 2, \ldots, n)$.

Обобщенные производные высшего порядка определяются по индукции, например, вторая обобщенная производная

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$$

есть обобщенная производная по x_1 от обобщенной производной $\frac{\partial F}{\partial x_2}$.

Заметим, что если данная функция F имеет на G обобщенные производные $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$, то автоматически существует обобщенная производная $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$, равная почти всюду $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$.

В самом деле, для любой функции $\varphi \in D$ имеет место

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\varphi\,dx = -\int \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,dx = \int F\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}\,dx =$$

$$= \int F\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\int \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,dx,$$

т. е. показано, локально интегрируемые функции $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ удовлетворяют равенству

$$\int \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\varphi\,dx = -\int \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,dx.$$

Но это значит, что первая из них есть обобщенная производная по x_2 от второй, т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$ почти всюду на G.

Эти факты легко обобщаются на смешанные производные более высокого порядка.

§ 19.6. Пространство обобщенных функций D'

Мы снова будем рассматривать пространство D бесконечно дифференцируемых финитных в некоторой области $\Omega \subset R_n$ функций φ (действительных или комплексных) и поставим своей целью определить над D пространство D' обобщенных функций, подобно тому как в § 16.7 было определено пространство S' над S.

Говорят, что последовательность функций $\varphi_k \in D$ сходится к $\varphi \in D$ в смысле (D), и пишут

$$\varphi_k \to \varphi \quad (D),$$

если носители φ_k принадлежат к одному и тому же компакту $F \subset \Omega$ и если равномерно (на R_n)

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k^{(s)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(s)}(\mathbf{x}), \qquad \varphi^{(0)} = \varphi,$$

какова бы ни была частная производная $\varphi^{(s)}$ порядка $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$.

Множество D называют *пространством* D (в связи с тем, что в нем определена сходимость — топология).

По определению *обобщенной функцией* $f \in D'$ называется линейный и непрерывный функционал (f, φ), определенный над D, т. е. такой функционал, для которого выполняются следующие два свойства:

1) $f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$ для любых чисел (действительных, комплексных) α, β и функций φ, $\psi \in D$, $(f(\varphi) = (f, \varphi))$,

2) $f(\varphi_k) \to f(\varphi)$, $\varphi_k \to \varphi \quad (D)$.

Очевидно, что $D \subset S$, где S — определенное в § 16.6 пространство бесконечно дифференцируемых на R_n функций, стремящихся к нулю на бесконечности вместе со своими частными производными быстрее любой степени $|x|$. Кроме того, сходимость $\varphi_k \to \varphi(D)$ является в то же время сходимостью $\varphi_k \to \varphi(S)$. Поэтому линейный непрерывный функционал f на S, если его рассматривать только для $\varphi \in D$, автоматически есть линейный непрерывный функционал на D. Говорят, что первый функционал *индуцирует* второй на D. В этом смысле можно считать, что $S' \subset D'$.

Например, δ-функция, определенная как функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in S$, индуцирует функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, называемый тоже δ-функцией (определенной на D).

Производная от $f \in D'$ порядка $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ определяется как функционал $(f^{(\mathbf{k})}, \varphi) = (-1)^{|\mathbf{k}|}(f, \varphi^{(\mathbf{k})})$, $\varphi \in D$. Но это же равенство, верное для всех $\varphi \in S$, определяет производную $f^{(\mathbf{k})}$ от $f \in S'$. Поэтому, если $f \in S'$, то производную $f^{(\mathbf{k})}$ в смысле (D) можно определить как функционал, индуцируемый на D функционалом $f^{(\mathbf{k})}$, определенным в смысле (S).

Если $f(\mathbf{x})$ есть функция, локально интегрируемая на Ω, то она *представляет обобщенную функцию* $f \in D'$ при помощи интеграла

$$(f, \varphi) = \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in D.$$

Непрерывность этого функционала следует из того, что если $\varphi_k \to \varphi(D)$, то $\varphi_k \to \varphi$ равномерно на R_n, и существует компакт $F \subset \Omega$, содержащий в себе носители φ и всех функций φ_k, и потому

$$|(f, \varphi) - (f, \varphi_k)| \leqslant \int_F |f(\mathbf{x})|\, |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant$$
$$\leqslant \max_x |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})| \int_F |f|\, d\mathbf{x} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 1. *Две локально интегрируемые на Ω функции f_1 и f_2 представляют один и тот же функционал тогда и только тогда, если они равны почти всюду на Ω.*

Доказательство. Положим $f(x) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})$. Очевидно, что теорема сводится к установлению того факта, что для выполнения равенства

$$\int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in D \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(\mathbf{x}) = 0 \text{ почти для всех } \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Из (2) тривиально следует (1). Доказать обратное нам поможет лемма.

Лемма. *Если функция $\psi(x)$ локально измерима*) и ограничена на открытом множестве G, то существует последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в G функций $\varphi_k \in D$, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\mathrm{x}) = \psi(\mathrm{x}) \quad \textit{почти всюду на } G, \tag{3}$$

$$|\varphi_k(\mathrm{x})| \leqslant \sup_{\mathrm{x}\in G} |\psi(\mathrm{x})|. \tag{4}$$

В самом деле, обозначим через G_N пересечение G с шаром $|\mathrm{x}| \leqslant N$ и пусть η_N убывает к нулю. Так как $\psi \in L(G_N)$, то можно указать бесконечно дифференцируемую финитную в G_N, следовательно, в G, функцию ψ_N такую, что (§ 18.2, свойство 4)

$$\|\psi - \psi_N\|_{L(G_N)} \leqslant \eta_N, \tag{5}$$

$$|\psi_N(x)| \leqslant \sup_{x\in G} |\psi(\mathrm{x})|. \tag{6}$$

Из (5) и (6) (см. § 19.3, свойство 21)**) следует, что из последовательности $\{\psi_N\}$ можно выделить подпоследовательность, подчиняющуюся условиям леммы.

Пусть теперь верно (1). Положим

$$\psi(\mathrm{x}) = \operatorname{sign} f(\mathrm{x}) \tag{7}$$

и пусть $G \subset \overline{G} \subset \Omega$ есть произвольное открытое ограниченное множество. Подберем для ψ последовательность бесконечно дифференцируемых финитных в G функций φ_k так, чтобы выполнялись условия (3), (4) доказанной леммы. Так как $\varphi_k \in D$, то в силу (1) $\int f(\mathrm{x})\,\varphi_k(x)\,dx = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$; и потому (пояснения ниже)

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_G f(\mathrm{x})\,\varphi_k(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} = \int_G f(\mathrm{x})\,\psi(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} = \int_G |f(\mathrm{x})|\,d\mathrm{x}, \tag{8}$$

т. е. $f(\mathrm{x}) = 0$ почти всюду на G и в силу произвольности G также почти всюду на Ω, и мы доказали (1).

---

*) Т. е. измерима на VG, где V — произвольный шар.

**) Из свойства 21, § 19.3 непосредственно следует, что так как $\|\psi - \psi_N\|_{L(G_1)} < \eta_N$, то найдется подпоследовательность (первая) $N_1^1, N_2^1, \ldots$, такая, что $\psi_{N_k^1} \to \psi$ почти всюду на Ω_1. Далее, $\left\|\psi - \psi_{N_k^1}\right\|_{L(G_2)} < \eta_{N_k^1}$, и можно из первой подпоследовательности выделить вторую $N_1^2, N_2^2, \ldots$, для которой $\psi_{N_k^2} \to \psi$ почти всюду на G_2. Продолжая этот процесс, получим таблицу подпоследовательности $N_1^k, N_2^k, \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots)$, каждая из которых есть подпоследовательность предыдущей. Легко видеть, что для диагональной подпоследовательности $N_1^1, N_2^2, \ldots$ будет $\psi_{N_k^k} \to \psi$ почти всюду на G.

Во втором члене цепи можно интегрировать только по G, потому что носитель φ_k принадлежит к G. Переход к третьему члену осуществлен на основании теоремы Лебега, применимой потому, что в силу (4) и (7) и локальной интегрируемости f

$$|f(\mathrm{x})\varphi_k(\mathrm{x})| \leqslant |f(\mathrm{x})| \leqslant L(G).$$

В заключение отметим теорему.

Теорема 2. *Пусть f и F — локально интегрируемые на Ω функции (таким образом, $f, F \in D'$).* Если

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \textit{на } \Omega \textit{ по Соболеву}, \tag{9}$$

то

$$f = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \textit{в смысле } (D), \tag{10}$$

и наоборот.

Ведь для локально интегрируемых на Ω функций F и f оба равенства (9), (10) эквивалентны следующему:

$$\int f(\mathrm{x})\,\varphi(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} = -\int F(\mathrm{x})\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx \text{ для всех } \varphi \in D.$$

§ 19.7. Неполнота пространства L_p'

Рациональные точки $(0, 1)$ перенумеруем $(r_1, r_2, \ldots)$ и покроем k-ю из них интервалом σ_k с центром в ней, принадлежащим к $(0, 1)$ и имеющим длину меньшую, чем $\varepsilon 2^{-k}$ $(0 < \varepsilon < 1, k = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть $G = \sum_1^\infty \sigma_k$ — множество (открытое), принадлежащее к $(0, 1)$, и

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \in [0, 1] - G = F, \end{cases}$$

т. е. $f = f_G$ есть характеристическая функция множества G. Пусть, далее, f_1 — функция, эквивалентная f (равная f почти всюду).

Лебегова мера множества G удовлетворяет неравенству

$$\mu G \leqslant \sum_1^\infty |\sigma_k| < \varepsilon < 1,$$

Поэтому дополнительное к нему множество (замкнутое) F имеет положительную лебегову меру. Обозначим через e то множество (лебеговой меры нуль), на котором f и f_1 различаются, и положим $G' = G \backslash e$, $F' = F \backslash e$. Если $x \in F'$, то $f_1(x) = 0$. Но в любой окрестности σ точки x имеется некоторая рациональная точка r_k, которая покрыта интервалом σ_k. При этом пересечение $\sigma\sigma_k(|\sigma\sigma_k| >$

>0!) заведомо содержит точки G', в которых $f_1 = 1$. Это показывает, что f_1 разрывна на множестве F' положительной меры, и потому по теореме Лебега (см. § 12.10) f_1 не интегрируема по Риману на $[0, 1]$. Она также не принадлежит к $L'(0, 1)$. Ведь не только ограниченные (интегрируемые по Риману), но и неограниченные функции из $L'(0, 1)$ непрерывны почти всюду на $[0, 1]$. Это легко вытекает из того, что если функция $f_1 \in L'(0, 1)$ не ограничена, то для нее существует на $[0, 1]$ только конечное число точек $x_0, \ldots, x_N$ таких, что на любом отрезке $[a, b]$, принадлежащем к $[0, 1]$ и не содержащем в себе ни одной из этих точек, f_1 интегрируема в римановом (собственном) смысле.

Таким образом, *функция f может служить примером ограниченной на* $[0, 1]$ *функции, не интегрируемой по Риману и такой, что любая, ей эквивалентная функция* $f_1 \notin L'$ $(0, 1)$.

Отметим еще, что так как $f = f_G$ есть характеристическая функция множества G, то *последнее может служить примером ограниченного открытого множества, не измеримого по Жордану, так же как, очевидно, F может служить примером ограниченного замкнутого множества, не измеримого по Жордану.*

Но, конечно, множества G и F измеримы по Лебегу, потому что любое открытое и любое замкнутое ограниченное множество обладает этим свойством. Поэтому функция f интегрируема по Лебегу на $(0, 1)$ и ее интеграл равен

$$\int_G f\,dx = \int_G f_1 dx \doteq \mu G.$$

Пусть $f_k(x)$ есть характеристическая функция множества $\omega_k = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k$. Очевидно, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_k(x)|\,dx = \int_{G-\omega_k} |f(x)|\,dx = \mu(G - \omega_k) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Но тогда удовлетворяется условие Коши, т. е. для всякого $\eta > 0$ можно указать N такое, что

$$\int_0^1 |f_k(x) - f_l(x)|\,dx < \eta, \quad k, l > N. \tag{1}$$

Всюду выше интегралы понимались в лебеговом смысле. Однако интегралы (1) можно понимать также и в римановом смысле, потому что функции $f_k(x)$ интегрируемы по Риману на $[0, 1]$.

Итак, имеется следующая ситуация: последовательность функций $f_k \in L'(0, 1)$ удовлетворяет условию Коши в смысле $L(0, 1)$, но не существует функции $\varphi \in L'(0, 1)$, к которой f_k стремится в смысле $L(0, 1)$.

Ведь если бы такая функция φ существовала, то она принадлежала бы также к $L(0, 1)$ (см. § 19.3, свойство 20), но тогда в силу единственности с точностью до эквивалентности функции f, для которой лебегов интеграл

$$\int_0^1 |f - f_k|\,dx \to 0, \quad k \to \infty,$$

стремится к нулю, φ должна равняться одной из функций f_1, эквивалентных f, и мы пришли к противоречию, потому что $f_1 \notin L'(0, 1)$.

Этим доказано, что *пространство* $L'(0, 1)$ *не полно*. Применяя ту же функцию f, читатель, аналогично рассуждая, докажет, что и *пространство* $L'_p(0, 1)$ *не полно.*

§ 19.8. Обобщение меры Жордана

Мы будем рассматривать полуоткрытые (ограниченные) прямоугольники

$$\Delta = \{c_j \leqslant \xi_j < d_j;\ j = 1, \ldots, n\}$$

и фигуры (полуоткрытые)

$$\sigma = \sum_{j=1}^{N} \Delta^j$$

— конечные суммы попарно непересекающихся полуоткрытых прямоугольников.

Иногда будем говорить просто о фигурах σ, подразумевая, что они полуоткрыты. Если же появится необходимость говорить о замкнутой или открытой фигуре (прямоугольнике), то это будет всякий раз оговариваться.

Пусть $G = \{a_j \leqslant \xi_j < b_j;\ j = 1, \ldots, n\}$ — фиксированный прямоугольник и каждому $\Delta \subset G$, в том числе и G, приведено в соответствие неотрицательное число $\alpha(\Delta)$ такое, что $\alpha(\Delta)$ есть аддитивная функция от Δ, т. е. если $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \Delta^j$, где Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники, то

$$\alpha(\Delta) = \sum_{j=1}^{N} \alpha(\Delta^j). \tag{1}$$

Функцию $\alpha(\Delta)$ будем считать продолженной на произвольные $\Delta \subset R_n$, положив

$$\alpha(\Delta) = \alpha(G\Delta).$$

Мы считаем $\alpha(\Delta) = 0$ для любого прямоугольника Δ не пересекающегося с G. Продолженная функция, очевидно, неотрицательна и аддитивна.

Распространим $\alpha(\Delta)$ на все фигуры $\sigma\subset G$, положив

$$\alpha(\sigma)=\sum_{j=1}^{N}\alpha(\Delta^j),\quad \sigma=\sum_{j=1}^{n}\Delta^j,$$

где Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники.

Легко видеть, что $\alpha(\sigma)$ есть аддитивная неотрицательная функция от $\sigma\subset G$. Таким образом,

$$\alpha(\sigma')+\alpha(\sigma'')=\alpha(\sigma'+\sigma'')$$

для непересекающихся $\sigma',\sigma''\subset G$.

Пустое множество $\varnothing$ мы тоже называем фигурой и полагаем $\alpha(\varnothing)=0$. Тогда для любой $\sigma\subset G$

$$\alpha(\sigma+\varnothing)=\alpha(\sigma)=\alpha(\sigma)+\alpha(\varnothing).$$

Очевидно, $\sigma'-\sigma$ есть фигура вместе с σ и σ', и если $\sigma\subset\sigma'$, то

$$0\leqslant\alpha(\sigma'-\sigma)=\alpha(\sigma')-\alpha(\sigma),$$

откуда $\alpha(\sigma)\leqslant\alpha(\sigma')$.

Условимся, что $A\subset\subset B$ обозначает, что $\bar{A}\subset\tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — открытое ядро B, т. е. совокупность внутренних точек B. Таким образом, границы A и B не пересекаются.

Пусть $\Omega\subset G$ — произвольное множество.

По определению его *внутренняя мера* (*относительно* $\alpha(\Delta)$ *в духе Жордана*) есть верхняя грань

$$m_i\Omega=\sup_{\sigma\subset\subset\Omega}\alpha(\sigma).$$

Отметим, что в случае меры Жордана ($\alpha(\Delta)=|\Delta|$) справедливо равенство

$$\sup_{\sigma\subset\Omega}|\sigma|=\sup_{\sigma\subset\subset\Omega}|\sigma|,$$

которое не изменится, если под σ понимать замкнутые фигуры вместо полуоткрытых, как это считалось при определении внутренней меры Жордана (см. § 12.5). Для произвольной меры $\alpha(\Delta)$ это равенство вообще неверно (см. ниже примеры 1, 2).

Так как $0\leqslant\alpha(\sigma)\leqslant\alpha(G)$ для всех $\sigma\subset\subset\Omega$, то (конечное) число $m_i\Omega$ существует и неотрицательно.

Конечно, если Ω, кроме пустого множества, не содержит в себе ни одного прямоугольника, то $m_i\Omega=0$.

По определению *внешняя мера* (*относительно* $\alpha(\Delta)$ *в духе Жордана*) есть нижняя грань

$$m_e\Omega=\inf_{\sigma\supset\supset\Omega}\alpha(\sigma).$$

Если замыкание $\bar{\Omega}$ имеет общие точки с границей $\dot{G}$, то для того, чтобы это определение было корректным, мы считаем, что $\alpha(\Delta)$ продолжена на все $\Delta\subset R_n$.

Так как $\alpha(\sigma) \geqslant 0$ для любой σ, то число $m_e\Omega$ существует для любого $\Omega \subset G$ и не отрицательно.

Очевидно, что $m_i\Omega \leqslant m_e\Omega$. В случае равенства мы будем говорить, что множество Ω *измеримо* (*относительно* $\alpha(\Delta)$ *в духе Жордана*) и его мера есть

$$m\Omega = m_i\Omega = m_e\Omega.$$

Рассматриваемая здесь мера превращается в меру Жордана, если $\alpha(\Delta)$ равна $|\Delta|$ — n-мерному объему Δ. Да и основные ее свойства аналогичны и доказываются аналогично (см. § 12.5). Ниже мы их перечисляем.

Вместе с Ω_1 и Ω_2 измеримы также множества $\Omega_1 \pm \Omega_2$ и $\Omega_1\Omega_2$, а если Ω_1 и Ω_2 не пересекаются, то $m(\Omega_1 + \Omega_2) = m\Omega_1 + m\Omega_2$; таким образом, если $\Omega_1 \supset \Omega_2$, то $m(\Omega_1 - \Omega_2) = m\Omega_1 - m\Omega_2$.

Множество Ω измеримо тогда и только тогда, когда его граница имеет меру (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) нуль.

Мы видим, что, так же как в случае меры Жордана, чтобы распознать измеримое множество, достаточно установить, что его граница Γ имеет меру нуль в смысле $\alpha(\Delta)$. В случае жордановой меры этот вопрос всецело зависит от геометрических свойств Γ. В общем же случае это не всегда так.

Пример 1. Пусть масса, равная 2, распределена на отрезке [0, 1] следующим образом. Половина ее, равная 1, распределена на [0, 1] равномерно, а другая половина сконцентрирована в точке $x = 1/2$. Функция $\alpha(\Delta)$, где $\Delta \subset [0, 1]$ — произвольный полуинтервал, равна массе Δ. Иначе говоря,

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} |\Delta|, & \text{если } \frac{1}{2} \overline{\in} \Delta, \\ |\Delta| + 1, & \text{если } \frac{1}{2} \in \Delta, \end{cases}$$

где $|\Delta|$ — длина Δ.

Легко видеть, что, исключая точку $x = 1/2$, любая точка, рассматриваемая как множество, имеет меру в смысле $\alpha(\Delta)$, равную нулю. Множество же e, состоящее из исключительной точки $x = 1/2$, неизмеримо в смысле $\alpha(\Delta)$, ведь $m_ie = 0$, $m_ee = 1$. Очевидно, внутренняя мера отрезка [1/2, 1] равна $m_i[1/2, 1] = \sup\limits_{\Delta \subset\subset [1/2,\, 1]} |\Delta| = 1/2$, между тем $\sup\limits_{\Delta \subset [1/2,\, 1]} \alpha(\Delta) = \alpha[1/2, 1] = 3/2$.

Пример 2. Пусть масса, равная 3, распределена на квадрате $\overline{G} = \{0 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$ следующим образом. Единица распределена на G равномерно, другая единица равномерно распределена на наибольшем принадлежащем G полуинтервале γ прямой $x = 1/2$, наконец, третья единица сконцентрирована в точке (1/2, 1/2). Функция $\alpha(\Delta)$ равна по определению массе Δ. Иначе говоря,

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} |\Delta|, & \text{если } \Delta\gamma = 0, \\ |\Delta| + |\Delta'|, & \text{если } \Delta \text{ пересекается с } \gamma, \text{ но не с точкой } (1/2,1/2), \\ |\Delta| + |\Delta'| + 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $|\Delta|$ — площадь Δ, а $|\Delta'|$ — длина проекции Δ на ось y.

В этом примере, если не считать точку (1/2, 1/2) каждая точка G, рассматриваемая как множество, имеет меру нуль (относительно $\alpha(\Delta)$). Любой принадлежащий интервалу γ отрезок неизмерим. С другой стороны, непрерывная кривая Γ, $y=\varphi(x)$ $0\leqslant x\leqslant 1$, удовлетворяющая условию $0\leqslant \leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, $\varphi(1/2)\neq 1/2$, как нетрудно видеть, имеет меру нуль относительно $\alpha(\Delta)$, несмотря на то что она пересекает γ.

Приведенные примеры показывают, что неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$ может быть такой, что в G будут существовать отдельные точки и отрезки, представляющие собой неизмеримые относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана множества.

Введем прямоугольник (для данного $i=1,\ldots,n$)

$$\Delta_t^i=\{\xi: a_i\leqslant\xi_i<t;\ a_j\leqslant\xi_j<b_j;\ j\neq i\}$$

и функцию $\beta_i(t)=\alpha(\Delta_t^i)$, $a_i<t\leqslant b_i$, $\beta_i(a_i)=0$.

Зафиксируем $t\in(a_i,b_i)$ и обозначим через $G_i(t)$ сечение G плоскостью $x_i=t$. Пусть $a_i<t'<t<t''<b_i$. Если задать прямоугольник $\Delta\supset\supset G$, то фигура $\sigma=(\Delta-G)+(\Delta_{t''}^i-\Delta_{t'}^i)$содержит строго внутри себя $G_i(t)$. При этом $\alpha(\Delta-G)=0$ в силу соглашения о продолжении $\alpha(\Delta)$ (см. (1)), и потому

$$\alpha(\sigma)=\alpha(\Delta_{t''}^i)-\alpha(\Delta_{t'}^i)=\beta_i(t'')-\beta_i(t'). \qquad (2)$$

Предел левой, а следовательно, и правой части (2), при $t''-t'\to 0$ равен нулю тогда и только тогда, когда сечение $G_i(t)$ имеет меру $m(G_i(t))=0$, или, что все равно, если функция β_i непрерывна в точке t. Сечение $G_i(t)$ в этом случае мы будем называть *регулярным* сечением G ($a_i<t<b_i$!).

Конечная система регулярных сечений (вообще для разных $i=1,\ldots,n$) определяет некоторое разбиение G на попарно непересекающиеся прямоугольники, которое мы будем называть *регулярным*.

Так как функции $\beta_i(t)$ не убывают и, следовательно, если имеют точки разрыва, то самое большое счетное число, то для всякого $\varepsilon>0$ найдется регулярное разбиение G с частичными прямоугольниками диаметра меньшего чем ε.

В одномерном случае $G=\{a\leqslant\xi<b\}$,

$$\Delta_x=\{a\leqslant\xi<x\},\quad \beta(x)=\alpha(\Delta_x),\quad a<x\leqslant b,\quad \beta(a)=0. \qquad (3)$$

Поэтому, если $\Delta=\{x\leqslant\xi<y\}\subset G$ — произвольный полуинтервал, то

$$\alpha(\Delta)=\beta(y)-\beta(x). \qquad (4)$$

Итак, всякая аддитивная неотрицательная функция $\alpha(\Delta)$, $\Delta\subset \subset G$, определяет при помощи равенств (3) обычную неотрицательную неубывающую на $[a,b]$ функцию $\beta(x)$ такую, что для любого $\Delta\subset G$ выполняется соотношение (4).

Наоборот, очевидно, что каждой неубывающей функции $\beta(x)$, $\beta(a)=0$, при помощи равенств (3), (4) ставится в соответствие неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$, $\Delta\subset G$.

В двумерном случае $G = \{a \leqslant \xi < b,\ c \leqslant \eta < d\}$. В этом случае имеет смысл ввести полуоткрытые прямоугольники

$$\Delta_{xy} = \{a \leqslant \xi < x, \quad c \leqslant \eta < y\}$$

и функцию

$$F(x, y) = \alpha(\Delta_{xy}), \qquad a < x \leqslant b, \quad c < y \leqslant d, \tag{5}$$

$$F(a, y) = F(x, c) = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d, \tag{5'}$$

удовлетворяющую, очевидно, свойству

$$0 \leqslant F(x, y) \leqslant F(x', y'), \quad x \leqslant x',\ y \leqslant y'. \tag{6}$$

Кроме того, если $(x > a, y > c)$,

$$\Delta = \{x \leqslant \xi < x', \quad y \leqslant \eta < y'\}, \quad \Delta_1 = \{x \leqslant \xi < x', \quad 0 \leqslant \eta < y\},$$
$$\Delta_2 = \{0 \leqslant \xi < x, \quad y \leqslant \eta < y'\},$$

то $\Delta_{x'y'} = \Delta_{xy} + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta$, где прямоугольники справа попарно не пересекаются, и потому

$$\alpha(\Delta_{x'y'}) = \alpha(\Delta_{xy} + \Delta_1) + \alpha(\Delta_{xy} + \Delta_2) - \alpha(\Delta_{xy}) + \alpha(\Delta).$$

Отсюда справедливо равенство

$$\alpha(\Delta) = F(x', y') - F(x', y) - F(x, y') + F(x, y), \tag{7}$$

верное (см. (5′)) и при $x = a$, $c \leqslant y \leqslant d$ и при $y = c$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Следовательно $(x \leqslant x', y \leqslant y')$,

$$F(x', y') - F(x', y) - F(x, y') + F(x, y) \geqslant 0. \tag{8}$$

Таким образом, неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$ определяет при помощи равенств (5), (5′), (7) функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую условиям (6) и (8). Очевидно, что и наоборот, функция $F(x, y)$ со свойствами (5′), (6), (8) определяет при помощи (5), (7) неотрицательную аддитивную функцию $\alpha(\Delta)$.

Если F непрерывна в точках (x, y), (x', y), (x, y'), (x', y'), то, очевидно, для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такие Δ' и Δ'', $\Delta' \subset\subset \Delta \subset\subset \Delta''$, что $\alpha(\Delta'') - \alpha(\Delta') < \varepsilon$, и тогда прямоугольник Δ (полуоткрытый или замкнутый или открытый) есть измеримое множество в смысле $\alpha(\Delta)$.

Заметим, что если F имеет на $\overline{G}$ непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F''_{xy}, то правую часть (8) можно записать (см. § 7.7) в виде $F''_{xy}(x' - x)(y' - y)$, где вторая производная F''_{xy} соответствует некоторой внутренней точке открытого прямоугольника $\{x < \xi < x',\ y < \eta < y'\}$.

По аналогии эти рассуждения распространяются на n-мерный случай, где роль выражения (8) играет разность $\Delta^n F = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \ldots \Delta_n F$, представляющая собой результат последовательного применения к $F(x)$ операций Δ_i первой разности по переменным x_i с шагом $x_i' - x_i$. Теперь уже вместо F''_{xy} будет фигурировать смешанная производная $F^{(n)}_{x_1 \ldots x_n}$.

§ 19.9. Интеграл Римана — Стилтьеса

Пусть $\Omega \subset G$ — измеримое (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) множество и $f(\mathrm{x})$ — определенная на нем функция. Каждому разбиению ρ множества Ω $\left(\Omega = \sum_{j=0}^{N-1} \Omega_j\right)$ на конечное число измеримых частей, пересекающихся попарно разве что по своим границам, приведем в соответствие сумму (*Римана — Стилтьеса*)

$$S_\rho(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi^j)\, m\Omega_j, \quad \xi^j \in \Omega_j. \tag{1}$$

Интегралом Римана — Стилтьеса от f на Ω (относительно $\alpha(\Delta)$) называется предел

$$\lim S_\rho(f) = \int_\Omega f(x)\, dm, \quad \max d(\Omega_j) \to 0, \tag{2}$$

когда максимальный диаметр $d(\Omega_j)$ стремится к нулю.

Как обычно, этот предел не должен зависеть от выбора последовательности разбиений и точек $\xi^j \in \Omega_j$.

Если $\alpha(\Delta) = |\Delta|$ — n-мерный объем Δ, то (2) есть интеграл Римана от f на Ω.

Вообще, неограниченная функция может оказаться интегрируемой в смысле Римана — Стилтьеса, но если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать разбиение Ω на части положительной меры диаметра меньшего ε, то, так же как в случае интеграла Римана (см. теорему 1 § 12.10), из того, что $f(\mathrm{x})$ интегрируема на Ω (относительно $\alpha(\Delta)$) следует ее ограниченность на Ω.

Основные свойства интеграла Римана — Стилтьеса полностью аналогичны соответствующим свойствам интеграла Римана. Как для последнего можно ввести для ограниченной функции $f(\mathbf{x})$ верхнюю и нижнюю интегральные суммы

$$\overline{S}_\rho = \sum_0^{N-1} M_j m\Omega_j, \quad \underline{S}_\rho = \sum_0^{N-1} m_j m\Omega_j,$$

$$m_j = \inf_{x \in \Omega_j} f(\mathrm{x}), \quad M_j = \sup_{x \in \Omega_j} f(\mathrm{x})$$

и на их основе построить верхний и нижний интегралы $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Теоремы переносятся на общий случай без изменений в доказательстве.

Верна и теорема Лебега (см. §§ 12.8, 12.10): для того чтобы ограниченная на замкнутом измеримом (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана) множестве Ω функция f была интегрируемой в смысле

Римана — Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы ее точки разрыва составляли множество e лебеговой (относительно $\alpha(\Delta)$) меры нуль ($\mu e = 0$, см. ниже § 19.12).

Понятие интеграла Римана — Стилтьеса обобщают еще на так называемые функции $\gamma(\Delta)$ ограниченной вариации, каждая из которых есть разность $\gamma(\Delta) = \alpha_1(\Delta) - \alpha_2(\Delta)$ двух неотрицательных аддитивных функций от $\Delta \subset G$.

Если m_1, m_2 суть соответственно меры (в духе Жордана), порождаемые неотрицательными аддитивными функциями $\alpha_1(\Delta)$, $\alpha_2(\Delta)$, то интеграл Римана — Стилтьеса относительно $\gamma(\Delta)$ определяется как разность интегралов

$$\int_{\Omega} f(x)\, d\gamma = \int_{\Omega} f(x)\, dm_1 - \int_{\Omega} f(x)\, dm_2. \tag{3}$$

Конечно, Ω здесь есть множество, измеримое (в духе Жордана) относительно как $\alpha_1(\Delta)$, так и $\alpha_2(\Delta)$.

Подобным образом на функции $\gamma(\Delta)$ ограниченной вариации обобщают интеграл Стилтьеса (см. ниже § 19.10, заменить m_1, m_2, Ω соответственно на α_1, α_2, G), а также интеграл Лебега — Стилтьеса (см. ниже § 19.12, заменить m_1, m_2 соответственно на μ_1, μ_2).

§ 19.10. Интеграл Стилтьеса

В этом параграфе мы определяем классический интеграл Стилтьеса и выясняем его связь с интегралом Римана — Стилтьеса. Областью, для которой задается интеграл Стилтьеса, является прямоугольник.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ задана на замыкании $\overline{G}$ полуоткрытого прямоугольника

$$G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\quad i = 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

где определена неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$ от $\Delta \subset G$ (полуоткрытого прямоугольника).

Произвольная прямоугольная сетка дробит G на открытые прямоугольники, которые мы перенумеруем при помощи одного индекса: $\Delta_1, \ldots, \Delta_{N-1}$.

Интегралом Стилтьеса от функции $f(\mathbf{x})$ на G называется предел

$$\lim \sum_{0}^{N-1} f(\xi^j)\,\alpha(\Delta_j) = \int_{G} f(\mathbf{x})\, d\alpha, \quad \xi^j \in \overline{\Delta}_j, \tag{2}$$
$$\max d(\Delta^j) \to 0.$$

Это определение отличается от определения интеграла Римана — Стилтьеса. Теперь множество $\Omega = G$ и входящие в его разбиения частичные множества Δ_j — прямоугольники, но не обязательно измеримые (относительно $\alpha(\Delta)$ в духе Жордана).

Конечно, выражения $\alpha(\Delta_i)$ в (2) можно записать на языке обычной функции, производящей заданную неотрицательную аддитивную функцию $\alpha(\Delta)$.

Например, в одномерном случае

$$\alpha(\Delta)=\beta(y)-\beta(x),\quad \Delta=[x,y),\quad a\leqslant x<y\leqslant b, \tag{3}$$

где $\beta(x)=\alpha(\Delta_x)$, $\Delta_x=[a,x)$, $\beta(a)=0$ — неотрицательная неубывающая на $\overline{G}=[a,b]$ функция. Если положить $a=x_0<x_1<\ldots<$ $<x_N=b$, $\Delta_j=[x_j,x_{j+1})$, то предел (2) записывается в следующей эквивалентной форме:

$$\lim\sum_0^{N-1}f(\xi^j)[\beta(x_{j+1})-\beta(x_j)]=\int_a^b f(x)\,d\beta(x), \tag{4}$$
$$\max(x_{j+1}-x_j)\to 0,$$

которая, кстати, является более употребительной, чем (2) и исторически первой (данной самим Стилтьесом).

Соответствующее эквивалентное выражение для интеграла (2) в двумерном случае записывается через функцию

$$F(x,y)=\alpha(\Delta_{xy}),\quad \Delta_{xy}=\{a\leqslant\xi<x,\quad c\leqslant\eta<y\},$$
$$F(x,c)=F(a,y)=0,\quad (x,y)\in\overline{G}, \tag{5}$$

обладающую свойствами

$$\alpha(\Delta)=F(x',y')-F(x,y')-F(x',y)+F(x,y)\geqslant 0,$$
$$\Delta=\{x\leqslant\xi<x',\quad y\leqslant\eta<y'\}.$$

Таким образом, если $a=x_0<x_1<\ldots<x_M=b$,

$$c=y_0<y_1<\ldots<y_N=d,$$
$$\Delta_{ij}=\{x_i\leqslant\xi<x_{i+1},\quad y_j\leqslant\eta<y_{j+1}\},\quad (\xi_i,\eta_j)\in\overline{\Delta}_{ij},$$
$$\alpha(\Delta_{ij})=F(x_{i+1},y_{j+1})-F(x_i,y_{i+1})-F(x_{i+1},y_i)+F(x_i,y_i),$$

то предел (2) можно записать в виде

$$\lim\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}f(\xi_i,\eta_i)\,\alpha(\Delta_{ij})=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,d^2F(x,y), \tag{6}$$
$$\max[(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{j+1}-y_j)^2]\to 0.$$

Зададим ограниченную на $\overline{G}$ функцию и для произвольного разбиения ρ

$$\overline{G}=\sum_0^{N-1}\Delta_j$$

(на полуоткрытые попарно непересекающиеся прямоугольники) составим сумму Стилтьеса

$$S_\rho = \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi^i)\alpha(\Delta_i) \quad (\xi^i \in \overline{\Delta}_i),$$

а также нижнюю и верхнюю суммы

$$\underline{S}_\rho = \sum_{i=0}^{N-1} m_i \alpha(\Delta_i), \quad \overline{S}_\rho = \sum_{i=0}^{N-1} M_i \alpha(\Delta_i)$$

и нижний и верхний интегралы

$$\underline{I} = \sup_\rho \underline{S}_\rho, \quad \overline{I} = \inf_\rho \overline{S}_\rho.$$

Теорема 1. *Для ограниченной на прямоугольнике* $\overline{G}$ *функции* $f(\mathbf{x})$ ($f(\mathbf{x}) \leqslant K$) *следующие утверждения эквивалентны:*

2′) *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется регулярное разбиение* ρ_* *прямоугольника* G (*на частичные попарно непересекающиеся полуоткрытые прямоугольники* Δ_j^*) *такое, что*

$$\overline{S}_{\rho*} - \underline{S}_{\rho*} < \varepsilon.$$

3′) *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для всех разбиений* (*регулярных и нерегулярных*) *с диаметром* $d(\Delta_j) < \delta$

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < \varepsilon.$$

4′) *Существует интеграл Стилтьеса* (2).

Доказательство 2′) → 3′). Пусть Γ_* есть общая граница всех Δ_j^*, из которой выброшена граница G. Так как ρ_* — регулярное разбиение, то $m\Gamma_* = 0$ и потому существуют фигуры $\sigma \supset \supset \sigma' \supset \supset \Gamma_*$, такие, что $\alpha(\sigma) < \varepsilon/2K$. Пусть δ — расстояние между границами σ и σ' и ρ — разбиение G с частичными прямоугольниками ω диаметра меньшего чем δ (мы пишем их без индексов). Имеем

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \Sigma'(M-m)\alpha(\omega) + \Sigma''(M-m)\alpha(\omega),$$

где сумма Σ' распространена на все ω, каждый из которых имеет общую точку с Γ_*, а Σ'' — на остальные ω.

Дальнейшая оценка ведется точно так же, как в теореме 1 § 12.7 при доказательстве 2) → 3), где надо заменить ω на $\alpha(\omega)$.

3′) → 2′). Это тривиально.

3′) → 4′). Надо рассуждать, как при доказательстве 3) → 4) в теореме 1 § 12.7, если заменить Ω_j на Δ_j и считать, что I есть интеграл (2).

4′) → 3′). Существование интеграла Стилтьеса I влечет неравенство $|I - S_\rho| < \varepsilon/2$ или

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S_\rho < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех ρ с $d(\Delta_j) < \delta$. Но тогда также $I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_\rho \leqslant \overline{S} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho < \varepsilon$.

Замечание. Теорема 1 неверна, если в 2′) вычеркнуть слово «регулярно» (см. ниже пример 1). Это показывает, что в теорему 1 нельзя ввести свойство 1′), выражающее, то $\underline{I} = \overline{I}$ (см. доказательство 1) $\rightleftarrows$ 2) в теореме 1 § 12.7). Из 2′) следует 1′), но из 1′) не следует 2′).

Теорема 2. *Для непрерывной на $\overline{G}$ функции $f(x)$ интеграл Стилтьеса* (2) *существует.*

В самом деле, пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на $\overline{G}$. Тогда, если $\delta = \max d(\Delta_i)$, где $G = \sum \Delta_i$ — некоторое разбиение ρ прямоугольника G (в частности, регулярное), то

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum (M_i - m_i)\,\alpha(\Delta_i) \leqslant \omega(\delta) \sum \alpha(\Delta_i) = \omega(\delta)\,\alpha(G) < \varepsilon, \quad \delta < \delta_0,$$

если δ_0 достаточно мало. Но тогда существование интеграла Стилтьеса (2) следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Если x^0 есть точка разрыва ограниченной на G функции $f(\mathrm{x})$ и множество ν, состоящее только из этой точки, имеет внешнюю меру $m_e(\nu) > 0$, то интеграл Стилтьеса* (2) *не существует.*

В самом деле, колебание $\omega(\mathrm{x}^0)$ функции f в точке x^0 положительно (см. теорему 5 § 7.10).

Пусть ρ есть разбиение G на частичные прямоугольники Δ_j такое, что x^0 находится строго внутри некоторого Δ_i.

Тогда

$$\overline{S}_\rho - \underline{S}_\rho = \sum_j (M_j - m_j)\,\alpha(\Delta_j) \geqslant (M_i - m_i)\,\alpha(\Delta_i) \geqslant \omega(\mathrm{x}^0)\, m_e(\nu),$$

где правая часть положительна и не зависит от указанного разбиения, и так как последнее может состоять из прямоугольников Δ_j как угодно малого диаметра, то в силу теоремы 1 интеграл (2) не существует.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \qquad \beta(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Для (нерегулярного) разбиения $-1 < 0 < 1$ отрезка $\overline{G} = [-1, +1]$, которое обозначим через ρ, имеет место $\underline{S}_\rho = \overline{S}_\rho = 1$, поэтому $\underline{I} = \overline{I}$. Однако интеграл Стилтьеса $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta(x)$ не существует, потому что $x = 0$ есть точка разрыва как f, так и β (см. теорему 3).

Утверждение 2′) $\to$ 3′) в теореме 1 можно выразить еще так.

Теорема 4. *Если для некоторой последовательности регулярных разбиений ρ_k существует предел*

$$I = \lim_{k\to\infty} S_{\rho_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N_k} f(\xi_k^j)\,\alpha(\Delta_j^k) \tag{7}$$

при любом выборе $\xi_k^j \in \overline{\Delta}_j^k$, *то существует интеграл Стилтьеса* (2), *равный* I (см. § 12.7 теорему 2).

Ведь из (7) следует, что $\overline{S}_{\rho_k} - \underline{S}_{\rho_k} \to 0$ $(k \to \infty)$, т. е. 2′). Но 2′) → 3′), следовательно, существует интеграл, равный, очевидно, I.

Теорема 5. *Для измеримого прямоугольника G интеграл Стилтьеса* (2) *и интеграл Римана — Стилтьеса* (2) *от ограниченной функции $f(\mathbf{x})$ существуют одновременно и равны между собой.*

В самом деле, зададим последовательность регулярных разбиений ρ_k прямоугольника G на частичные прямоугольники Δ_j^k с $\max\limits_j d(\Delta_j^k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Все Δ_j^h, даже прилегающие к граням G, теперь измеримы, потому что G измерим.

Существование предела (7) необходимо и достаточно для существования как интеграла Стилтьеса (теорема 4), так и интеграла Римана — Стилтьеса (в силу аналога теоремы 2 § 12.7).

Таким образом, при измеримом G свойства интеграла Римана — Стилтьеса, о которых шла речь в § 19.9, автоматически переносятся на интеграл Стилтьеса. В частности, справедлива для измеримого G.

Теорема 6 (Лебега). *Для того чтобы для ограниченной на $\overline{G}$ функции $f(\mathbf{x})$ существовал интеграл Стилтьеса* (2), *необходимо и достаточно, чтобы лебегова (в смысле $\alpha(\Delta)$) мера множества e ее точек разрыва была равной нулю* $(\mu e = 0)$.

На самом деле теорема 6 верна и для неизмеримого G. Она содержит как частный случай теоремы 2 и 3. Докажем это.

Введем произвольный измеримый прямоугольник $G' \supset\supset G$. Функцию $\alpha(\Delta)$ будем считать продолженной на G', как в (1) § 19.6. Что же касается функции f, то продолжим ее на G' следующим образом. Пусть точка $\xi' \in G' - G$. Отрезок, соединяющий ее с центром G, пересекает границу Γ прямоугольника G в точке, которую обозначим через ξ. Положим $f(\xi') = f(\xi)$. Таким образом, продолженная функция постоянна на принадлежащих к $G' - G$ отрезках лучей, выходящих из центра G.

Продолженная функция f, очевидно, ограничена на G'. Кроме того, функция f непрерывна в точке ξ', если она непрерывна в ней относительно $\overline{G}$. Далее, если $\Delta' \subset G'$ есть прямоугольник, пересекающий Γ, и $\xi' \in \overline{\Delta}'$, то можно указать на $\overline{\Delta}'$, где $\Delta = G\Delta'$, точку ξ такую, что

$$f(\xi')\alpha(\Delta') = f(\xi)\alpha(\Delta). \qquad (8)$$

Действительно, $\alpha(\Delta') = \alpha(\Delta)$ (см. (1) § 19.6). Если $\xi' \in \Delta$, то полагаем $\xi = \xi'$, а если $\xi' \overline{\in} \Delta$, то в качестве ξ берем точку пересечения с Γ отрезка, соединяющего ξ' с центром G.

Если ρ' есть произвольное регулярное разбиение прямоугольника G', то оно индуцирует регулярное же разбиение ρ прямоугольника G. При этом каждой интегральной сумме $S_{\rho'}$ можно привести в соответствие равную ей интегральную сумму S_ρ,

$$S_{\rho'} = \sum f(\xi')\,\alpha(\Delta') = \sum f(\xi)\,\alpha(\Delta) = S_\rho,$$

руководствуясь следующими соображениями.

Если Δ' не пересекается с G, то соответствующее слагаемое $S_{\rho'}$ выбрасываем — оно все равно нулю. Если же Δ' пересекается с G, то к соответствующему слагаемому применяем равенство (8).

Наоборот, если задано регулярное разбиение ρ прямоугольника G, то, продолжив составляющие его регулярные сечения G ($(n-1)$-мерные плоскости) и выбросив грани G, получим регулярное же разбиение ρ' прямоугольника G' и, рассуждая, как выше, в обратном порядке (даже не передвигая точки ξ), получим, что каждой интегральной сумме S_ρ соответствует равная ей сумма $S_{\rho'}$.

Из сказанного следует равенство интегралов Стилтьеса

$$\int_G f(x)\,d\alpha = \int_{G'} f(x)\,d\alpha, \tag{9}$$

(существование одного из них влечет существование другого).

Но второй из них есть также интеграл Римана — Стилтьеса (G' измеримо!), и потому он существует тогда и только тогда, когда множество e' точек разрыва f на $\bar{G}'$ имеет лебегову (относительно $\alpha(\Delta)$) меру

$$\mu e' = 0 \tag{10}$$

или, что все равно, если множество e точек разрыва f на $\bar{G}$ имеет лебегову (относительно $\alpha(\Delta)$) меру

$$\mu e = 0. \tag{11}$$

В самом деле, существование левого интеграла в (9) влечет существование правого и равенство (10), следовательно (11), так как $e \subset e'$.

Наоборот, из (11) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует счетная система прямоугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ такая, что $\sum \Delta_j \supset e$ и $\sum \alpha(\Delta_j) < \varepsilon$. Прибавим к ней систему (конечную) полуоткрытых прямоугольников, составляющих множество $G' - G$. Для полученной системы, которую мы заново перенумеруем — $\Delta_1', \Delta_2', \ldots$, будет выполняться $\sum \Delta_j' \supset e'$ и $\sum \alpha(\Delta_j') < \varepsilon$, потому что $\alpha(G' - G) = 0$, т. е. (10). Но тогда существует правый интеграл в (9), а вместе с ним и левый.

Теорема 7. *Пусть для полуинтервалов, принадлежащих $[a, b)$ и $[c, d)$, заданы соответственно неотрицательные полуаддитивные функции $\alpha_1(\Delta_1)$, $\alpha_2(\Delta_2)$, порождающие функцию*

$$\alpha(\Delta) = \alpha_1(\Delta_1)\cdot\alpha_2(\Delta_2),$$

$$\Delta_1 = \{\lambda \leqslant x < \mu\},\ \Delta_2 = \{\nu \leqslant y < \omega\},$$

$$\Delta = \{\lambda \leqslant x < \mu,\ \nu \leqslant y < \omega\} = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset G,\ G = [a, b) \times [c, d),$$

Тогда для ограниченной функции $f(x, y)$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_G\int f(x, y)\,d\alpha = \int\limits_c^d d\alpha_2 \int\limits_a^b f(x, y)\,d\alpha_1$$

в предположении, что интеграл слева существует, и тогда автоматически следует существование повторного интеграла справа, где, впрочем, для каждого $y \in [c, d)$ *внутренний интеграл (по* x*) понимается либо в обычном смысле как интеграл Стилтьеса, если он существует, либо как любое число, находящееся между нижним и верхним интегралами Стилтьеса от* $f(x, y)$ *относительно* α_1 *на* $[a, b]$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1 § 12.12.

Для интеграла Стилтьеса справедливы теоремы, аналогичные теоремам для Риманова интеграла и применимо замечание к равенству (3) § 19.7.

Упражнения.

1. Показать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\beta(x) = \int\limits_a^b f(x)\,\beta'(x)\,dx,$$

где $\beta(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную $\beta'(x) \geqslant 0$.

2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $c_0, c_1, \ldots$ — последовательность неотрицательных чисел, для которой $\sum c_j < \infty$, точки $x_j \in [a, b]$, $j = 1, 2, \ldots$, и

$$\beta(x) = \sum_{x_j \in [a, x)} c_j. \qquad (12)$$

Показать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\beta(x) = \sum_{x_i \in [a, x)} f(x_j)\,c_j.$$

3. Показать, что функция, определенная формулой (12), где c_j — числа любого знака, но такие, что $\sum |c_j| < \infty$, есть функция ограниченной вариации, т. е. представляется как разность двух неубывающих на $[a, b]$ функций.

4. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и не убывают (или ограниченной вариации). Доказать формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x) + \int\limits_a^b \varphi(x)\,df(x) = f(b)\,\varphi(b) - f(a)\,\varphi(a).$$

5. Иногда условливаются считать функцию $f(x)$, заданную на прямоугольнике G, интегрируемой относительно $\alpha(\Delta)$, если ее верхний интеграл $\bar{I}$ (относительно $\alpha(\Delta)$) равен нижнему — $\underline{I}$, и полагают

$$I = I(f) = \int\limits_G f(\mathrm{x})\,d\alpha, \qquad \text{где } I = \underline{I} = \bar{I}.$$

Это *обобщение интеграла Стилтьеса* (см. выше пример 1). Чтобы разобраться в нем, отметим, что для ограниченной функции f следующие утверждения эквивалентны:

1 *) $\underline{I} = \bar{I} = I$;

2 *) существует последовательность разбиений $\rho_k \left(G = \sum_j \Delta_k^j\right)$, для которой

$$\overline{S}_{\rho_k} - \underline{S}_{\rho_k} \to 0, \quad k \to \infty;$$

3 *) существует последовательность разбиений ρ_k, для которой

$$\lim_{k\to\infty} S_{\rho_k} = I \quad \text{при любых } \xi_k^j \in \Delta_k^j.$$

В самом деле, из 2 *) и неравенств $\underline{S}_{\rho_k} \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant \underline{S}_{\rho_k}, \underline{S}_{\rho_k} \leqslant S_{\rho_k} \leqslant \overline{S}_{\rho_k}$ следует 3 *) (при тех же ρ_k). Далее, из 3 *) следует, что

$$\lim \underline{S}_{\rho_k} = \lim \overline{S}_{\rho_k} = I. \tag{13}$$

Если теперь ρ — произвольное разбиение и $\rho_k^* = \rho + \rho_k$, то $\underline{S}_\rho \leqslant \underline{S}_{\rho_k^*} \leqslant \leqslant \overline{S}_{\rho_k^*} \leqslant \overline{S}_{\rho_k} \to I$, $k \to \infty$, т. е. $\underline{S}_\rho \leqslant I$, поэтому, учитывая (13), получим $\underline{I} = I$. Аналогично устанавливается, что 3 *) влечет $\bar{I} = I$. Этим доказано, что 3 *) $\to$ 1 *). Далее, если $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, то из 1 *) следует существование разбиений ρ_k', ρ_k'' таких, что $I - \varepsilon_k < \underline{S}_{\rho_k'}$, $\overline{S}_{\rho_k''} < I + \varepsilon_k$, поэтому для $\rho_k = \rho_k' + \rho_k''$ будем иметь $I - \varepsilon_k < \underline{S}_{\rho_k'} \leqslant \underline{S}_{\rho_k} \leqslant \overline{S}_{\rho_k} \leqslant \overline{S}_{\rho_k''} < I + \varepsilon_k$, что доказывает 2 *).

Таким образом, обобщенный интеграл Стилтьеса можно также определить как число I, для которого имеет место 3 *) для некоторой последовательности разбиений ρ_k.

Если эту последовательность можно взять состоящей из регулярных ρ_k, то, согласно теореме 4, число I есть обычный интеграл Стилтьеса. В противном случае мы будем иметь дело с новым понятием — обобщенным интегралом Стилтьеса. Это понятие может оказаться полезным для функций, не удовлетворяющих условию Лебега в смысле $\alpha(\Delta)$ (см. теорему 6).

Пользуясь свойствами 2 *) и 3 *), читатель сам докажет (см. теоремы 1, 2, 4 § 12.11) что вместе с f и φ интегрируемы в указанном смысле $Af + B\varphi$, $|f|$, $f\varphi$, φ^{-1} ($|\varphi(x)| > a > 0$), и справедливы соотношения

$$I(Af + B\varphi) = AI(f) + BI(\varphi),$$
$$|I(f)| \leqslant K \sup_{x\in G} |f(x)|,$$

характеризующие линейные и непрерывные свойства функционала $I(f)$. Здесь A, B — произвольные числа, а K — константа, зависящая от обобщенной меры $\alpha(\Delta)$, а $I(f)$ — обобщенный интеграл Стилтьеса.

В одномерном случае $K = \beta(b) - \beta(a)$, в двумерном $K = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$.

Предлагается также доказать равенство

$$\int_G f(x)\, d\alpha = \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_j} f(x)\, dx,$$

где $G = \sum_{j=1}^{n} \Delta^j$ и Δ^j — попарно непересекающиеся прямоугольники, в предположении, что интеграл слева существует.

§ 19.11. Обобщенный интеграл Лебега

Понятие интеграла Лебега может быть обобщено следующим образом.

Пусть X есть множество элементов x любой природы и $\mathfrak{M}$ есть некоторая система его подмножеств e $(e \subset X)$, образующая кольцо. Это значит, что вместе с подмножествами e_1 и e_2 принадлежит $\mathfrak{M}$ их сумма $e_1 + e_2$, разность $e_1 - e_2$ и пересечение e_1e_2. По индукции доказывается, что конечная сумма $e = \sum e_k$, $e_k \in \mathfrak{M}$ принадлежит $\mathfrak{M}$.

На кольцо $\mathfrak{M}$ накладывается еще дополнительное условие: если $e_k \in \mathfrak{M}$ для любого $k = 1, 2, \ldots$ и $e = \Sigma_{e_k}$ — счетная сумма, принадлежащая к некоторому множеству $\mathscr{E} \in \mathfrak{M}(e \subset \mathscr{E})$, то $e \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь каждому множеству $e \in \mathfrak{M}$ приведено в соответствие неотрицательное (конечное) число μe, обладающее тем свойством, что если множество $e \in \mathfrak{M}$ представляется в виде конечной или счетной суммы $e = \sum e_k$ попарно непересекающихся множеств $e_k \in \mathfrak{M}$, то

$$\mu e = \sum \mu e_k. \tag{1}$$

Определенная таким образом неотрицательная функция множества μe $(e \in \mathfrak{M})$ называется мерой Лебега. Мы ее еще называем *обобщенной мерой Лебега*, чтобы отличать ее от ее частного случая, рассмотренного в § 19.3, где роль X играет n-мерное пространство, а $\mathfrak{M}$ — совокупность определенных там измеримых множеств.

Множества $e \in \mathfrak{M}$ мы будем называть *измеримыми*. Если какое-либо множество $\mathscr{E} \subset X$ есть часть измеримого множества e $(\mathscr{E} \subset e)$, то будем его называть *ограниченным*.

В силу этих соглашений для обобщенной меры Лебега верны теоремы 3—9 § 19.1. Теоремы 3, 4, 5 верны просто по определению (см. равенство (1)), теоремы же 6—9 доказываются без каких-либо изменений.

На основе введенной меры определяется понятие *измеримой функции*, как в § 19.2. Вообще все сказанное в § 19.2 полностью переносится на случай обобщенной меры Лебега, за исключением теоремы 4 и утверждения (на стр. 345) о непрерывной функции. Мы не ввели топологии в X (системы окрестностей и т. д.), и в общем случае не имеет смысла говорить о непрерывной функции, заданной на X.

Интеграл Лебега на множестве E, измеримом в смысле обобщенной меры, от функции $f(\text{x})$, измеримой в смысле этой меры, определяется как предел

$$\lim_{\delta_k \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} p_k m e_k = \int_E f(x)\, \mu(d\mathbf{x}),$$

где p_k, e_k, δ_k определяются, как в § 19.3 (см. (2), (3), (4) § 19.3) и мера e_k понимается в рассматриваемом обобщенном смысле.

Свойства интеграла Лебега, перечисленные в § 19.3, за исключением быть может свойства 19 (теорема Фубини) и свойства 22, переносятся на рассматриваемый случай без изменения доказательств.

Важным примером рассмотренного обобщенного интеграла является интеграл Лебега — Стилтьеса.

§ 19.12. Интеграл Лебега — Стилтьеса

Пусть задан полуоткрытый прямоугольник

$$G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\ \ i = 1, \ldots, m\}$$

и для принадлежащих к нему прямоугольников Δ определена неотрицательная аддитивная функция $\alpha(\Delta)$. В § 19.8 на основе $\alpha(\Delta)$ была построена мера в духе жордановой меры. В этом параграфе будет определена на основе $\alpha(\Delta)$ для некоторых множеств $\mathscr{E} \subset G$ мера в духе Лебега. Мы ее будем называть мерой относительно $\alpha(\Delta)$, коротко — мерой и обозначать $\mu\mathscr{E}$ (так же как мы обозначали лебегову меру!).

Мы будем пользоваться введенными в § 19.8 понятиями $m_i\mathscr{E}$, $m_e\mathscr{E}$, $m\mathscr{E}$, внутренней, внешней меры и меры в духе Жордана относительно $\alpha(\Delta)$.

Называя $\mathscr{E}$ множеством, мы будем подразумевать, что $\mathscr{E} \subset G$, и как всегда через F, G обозначать соответственно замкнутые и открытые множества. Кроме того, по-прежнему будем пользоваться обозначением $A \subset\subset B$, выражающим, что $\overline{A} \subset \tilde{B}$, где $\overline{A}$ — замыкание A, а $\tilde{B}$ — открытое ядро B (множество внутренних точек B).

Для открытого множества g по определению полагаем (пояснения ниже)

$$\mu g = m_i g = \sup_{\sigma \subset\subset g} \alpha(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(\Delta_k), \tag{1}$$

где

$$g = \sum_{1}^{\infty} \Delta_k, \quad \Delta_k \subset\subset g \tag{2}$$

— сумма полуоткрытых непересекающихся попарно прямоугольников Δ_k, каждый из которых имеет границу, не имеющую общих точек с границей g.

Заметим, что открытое ядро $\tilde{\sigma}$ фигуры σ можно представить в виде суммы $\tilde{\sigma} = \sum\limits_1^\infty \Delta_k$ непересекающихся попарно $\Delta_k \subset\subset \sigma$, и так как $\sum\limits_1^N \Delta_k \subset \sigma$, то $\sum\limits_1^N \alpha(\Delta_k) \leqslant \alpha(\sigma)$ при любом N и, следовательно,

$$\mu(\tilde{\sigma}) = \sum_1^\infty \alpha(\Delta_k) \leqslant \alpha(\sigma). \tag{3}$$

Для замкнутого множества F по определению (пояснения ниже)

$$\mu F = \alpha_e F = \inf_{\sigma \supset\supset F} \alpha(\sigma) = \inf_{g \supset F} \mu g. \tag{4}$$

Чтобы объяснить последнее равенство, обозначим левую его часть через I', а через I'' правую. Так как $\sigma \supset\supset F$, то $\tilde{\sigma} \supset\supset F$. Но $\tilde{\sigma}$ открыто, поэтому $\alpha(\sigma) \geqslant \mu(\tilde{\sigma}) \geqslant I''$, т. е. $I' \geqslant I''$.

С другой стороны, если представить любое $g \supset F$ в виде суммы вида (2), то в силу замкнутости F найдется N такое, что

$$\sigma = \sum_1^N \Delta_k \supset\supset F,$$

откуда $\mu(g) \geqslant \alpha(\sigma) \geqslant I'$, т. е. $I'' \geqslant I'$.

Следовательно, $I' = I''$.

Докажем для любой полуоткрытой фигуры σ неравенство

$$\alpha(\sigma) \leqslant \mu(\bar{\sigma}). \tag{5}$$

Пусть $g \supset \bar{\sigma}$ — произвольное открытое множество, представленное в виде (2). Вследствие замкнутости $\bar{\sigma}$ найдется N такое, что

$$\sigma \subset \bar{\sigma} \subset \sum_1^N \Delta_k \subset g.$$

Но тогда

$$\alpha(\sigma) \leqslant \sum_1^N \alpha(\Delta_k) \leqslant \mu g,$$

и так как нижняя грань всех рассматриваемых μg равна $\mu(\bar{\sigma})$, то получим (5).

Из введенных определений легко следует, что если $F \subset F'$ $g \subset g'$, то $\mu F \leqslant \mu F'$, $\mu g \leqslant \mu g'$. Кроме того, так как $F \subset F$ и верно (4), то

$$\mu F = \sup_{F' \subset F} \mu F' = \inf_{g \supset F} \mu g. \tag{6}$$

Но справедливы также равенства

$$\mu g = \sup_{F \subset g} \mu F = \inf_{g' \supset g} \mu g'. \tag{7}$$

Второе из них очевидно, потому что $g \supset g$. Чтобы обосновать первое, обозначим второй член этой цепи через I. Так как $\mu F \leqslant \mu g$ (см. (4)), то $I \leqslant \mu g$. С другой стороны, представим g в виде (2) и положим $\sigma_N = \sum_1^N \Delta_k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $(\bar{\sigma}_N \subset g)$

$$\mu g - \varepsilon < \sum_1^N \alpha(\Delta_k) = \alpha(\sigma_N) \leqslant \mu(\bar{\sigma}_N) \leqslant I,$$

и так как ε произвольно, то $\mu g \leqslant I$. Следовательно, $\mu g = I$.

По определению внутренней мерой относительно $\alpha(\Delta)$ множества $\mathscr{E}$ будем называть

$$\mu_i \mathscr{E} = \sup_{F \subset \mathscr{E}} \mu F$$

и внешней мерой относительно $\alpha(\Delta)$ множества $\mathscr{E}$ будем называть

$$\mu_e \mathscr{E} = \inf_{g \supset \mathscr{E}} \mu g.$$

Если $\mu_i \mathscr{E} = \mu_e \mathscr{E}$, то будем говорить, что множество $\mathscr{E}$ *измеримо* (*в смысле меры относительно* $\alpha(\Delta)$) и число $\mu \mathscr{E} = \mu_i \mathscr{E} = \mu_e \mathscr{E}$ называть *обобщенной мерой* или *мерой* $\mathscr{E}$ *относительно* $\alpha(\Delta)$.

Из равенств (6) и (7) следует, что замкнутое и открытое (принадлежащие G) множества измеримы (в указанном смысле).

Рассматриваемые здесь измеримые (в обобщенном смысле) множества имеют основные свойства, аналогичные соответствующим свойствам классических измеримых по Лебегу множеств. Ниже мы их перечисляем.

Вместе с $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ измеримы также их сумма, разность и пересечение, к тому же, если $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ не пересекаются, то

$$\mu(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2) = \mu \mathscr{E}_1 + \mu \mathscr{E}_2.$$

Сумма e счетного числа (принадлежащих к G) измеримых множеств $e_1, e_2, \ldots$ измерима, и если они не пересекаются, то

$$\mu e = \sum_1^\infty \mu e_k.$$

Пересечение счетного числа измеримых множеств измеримо.

Перечисленные утверждения и другие вытекающие из них в случае лебеговой меры составляют теоремы 1—9 § 19.1. Их доказательство в общем случае совершенно аналогично.

Эти теоремы базировались на леммах 1—5. Они тоже доказываются аналогично. Надо заменить в них $|\Delta_k|$, $|\sigma_k|$ соответственно на $\alpha(\Delta_k)$, $\alpha(\sigma_k)$, а в остальном учесть следующие замечания.

Формулировку леммы 1 надо заменить на следующую: из (3) следует (4), где σ_k и σ_k' — полуоткрытые фигуры, из коих σ_k попарно не пересекаются. В формулировке леммы 2 выбросить последнее выражение: «обращающееся в равенство...»

Отметим еще неравенства, аналогичные (14) § 19.1:

$$m_i\mathscr{E} \leqslant \mu_i\mathscr{E} \leqslant \mu_e\mathscr{E} \leqslant m_e\mathscr{E}. \tag{8}$$

Они следуют из того, что (см. (3), (5))

$$\sup_{\sigma\subset\subset\mathscr{E}} \alpha(\sigma) \leqslant \sup_{\bar{\sigma}\subset\subset\mathscr{E}} \mu\bar{\sigma} \leqslant \sup_{F\subset\mathscr{E}} \mu F,$$

$$\inf_{\sigma\supset\supset\mathscr{E}} \alpha(\sigma) \geqslant \inf_{\tilde{\sigma}\supset\supset\mathscr{E}} \mu\tilde{\sigma} = \inf_{g\supset\mathscr{E}} \mu g.$$

Из (8) вытекает, что *если множество $\mathscr{E}$ измеримо (в смысле $\alpha(\Delta)$) в жордановом духе, то и в лебеговом.*

Отметим, что в жордановой теории (в смысле $\alpha(\Delta)$) нам пришлось считаться с фактом, что некоторые прямоугольники могли быть неизмеримыми. В рассматриваемой же здесь теории этого недостатка нет. Замкнутые и открытые прямоугольники измеримы, ведь они суть соответственно замкнутые и открытые множества. Произвольный полуоткрытый прямоугольник

$$\Delta = \{\lambda_i \leqslant x_i < \mu_i; \quad i = 1, \ldots, n\}$$

тоже измерим, ведь он есть разность двух замкнутых множеств. Однако не нужно думать, что $\mu\Delta$ обязательно равна $\alpha(\Delta)$ (см. ниже упражнения 1, 2).

Множество ω, состоящее из одной точки, в жордановой теории (в смысле $\alpha(\Delta)$) имеет внутреннюю меру $m_i\omega = 0$ и, таким образом, измеримо тогда и только тогда, когда $m_e\omega = 0$. В рассматриваемой же здесь теории ω измеримо при любой $\alpha(\Delta)$, ведь оно замкнуто. Его мера равна внешней жордановой мере: $\mu\omega = m_e\omega$.

В классической теории Лебега на основе меры Лебега вводится понятие измеримой функции. В точности также вводится понятие измеримой функции на основе меры относительно $\alpha(\Delta)$. Все, что изложено по этому поводу в § 19.2, полностью и без всяких изменений переносится на общий случай, нужно только меру Лебега встречающихся там множеств заменить соответственно на их меру в смысле $\alpha(\Delta)$. Впрочем, в теореме 4 выражение «интегрируемая по Риману функция» надо заменить на «интегрируемая по Риману — Стилтьесу функция».

Наконец, в точности так же как вводится интеграл Лебега на основе понятия измеримой (по Лебегу) функции, вводится интеграл Лебега — Стилтьеса, но только уже на основе понятия измеримой в обобщенном смысле функции (в смысле $\alpha(\Delta)$).

Таким образом, интеграл Лебега — Стилтьеса может быть определен как один из пределов

$$\int\limits_{\mathscr{E}} f(x)\,d\mu = \lim_{\delta_R\to 0} \underline{S}_R(f) = \lim_{\delta_R\to 0} \overline{S}_R(f). \qquad (9)$$

Здесь $f(\mathbf{x})$ измеримая (в смысле μ или относительно $\alpha(\Delta)$) на множестве $\mathscr{E}$ функция, а $\underline{S}_R(f)$ и $\overline{S}_R(f)$ нижняя и верхняя интегральные суммы, определяемые в точности так же, как они определялись в § 19.3 в случае классического интеграла Лебега, но теперь множества e_k(см. начало § 19.3) измеримы в смысле μ и их меры μe_k понимаются в смысле μ (или относительно $\alpha(\Delta)$).

Определения справа в (9) приведены только для примера. Вообще весь § 19.3 со всеми формулировками и доказательствами переносится на интеграл Лебега — Стилтьеса.

Конечно, всюду в написанных там интегралах надо dx заменить на $d\mu$ и термин «интеграл Лебега» заменить на «интеграл Лебега — Стилтьеса». В свойстве 6 выражения «f интегрируема по Риману», «жорданова мера», «пересекаются попарно разве что по своим границам» надо соответственно заменить на «f интегрируема по Риману — Стилтьесу», «жорданова мера относительно $\alpha(\Delta)$», «попарно не пересекаются по множествам меры нуль». Свойство 15, утверждающее равенство несобственного абсолютно сходящегося интеграла Римана от f и интеграла Лебега от f, тоже переносится на общий случай, если по аналогии определить несобственный интеграл Римана — Стилтьеса.

Свойство 19 (теорема Фубини) непосредственно переносится на общий случай, если считать, что заданы две неотрицательные аддитивные функции $\alpha_1(\delta_1)$, $\alpha'(\delta')$ полуинтервала $\delta_1 = \{0 \leqslant x_1 < a\}$ и полуоткрытого прямоугольника $\delta' = \{0 \leqslant x_i < a,\ i = 2, \ldots, n\}$, которые порождают функцию $\alpha(\delta) = \alpha(\delta_1)\ \alpha(\delta')$, $\delta = \delta_1 \times \delta' = \Delta$ (см. свойство 19 из § 19.3). Тогда, если обозначить определяемые этими тремя функциями меры соответственно через μ, μ_1, μ', то верна формула (34) с приведенными к ней пояснениями, где надо только заменить dx, dx_1, dy соответственно на $d\mu$, $d\mu_1$, $d\mu'$.

Доказательство этой новой формулы такое же, как доказательство (34) § 19.3.

Остановимся еще на одном вопросе, который может дать представление о связи между интегралами Лебега и Лебега — Стилтьеса.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная интегрируемая на нем по Лебегу функция $\beta(x)$. Положим

$$\beta(x) = \int\limits_a^x \beta'(t)\,dt, \qquad x \in [a, b].$$

Тогда, как мы знаем (см. § 19.5 (11)) $\beta(x)$ есть абсолютно непрерывная функция, а $\beta'(x)$ — ее обобщенная производная (на $[a, b]$). К тому же в силу условия $\beta'(x) \geqslant 0$ функция $\beta(x)$ не убывает на $[a, b]$ и может рассматриваться как производящая функция для неотрицательной аддитивной функции полуинтервала $\alpha(\Delta) = \beta(d) - \beta(c)$, $\Delta = [c, d) \subset G = [a, b)$.

Заметим, что можно было бы исходить от неубывающей абсолютно непрерывной на $[a, b]$ функции $\beta(x)$ и показать, что ее обобщенная производная $\beta'(x)$ неотрицательна почти всюду на $[a, b]$.

Функция $\alpha(\Delta)$ определяет меру.

Если $g \subset [a, b]$ — открытое множество, т. е. есть сумма не более чем счетного числа интервалов (c_k, d_k), $k = 1, 2, \ldots$, то оно измеримо как в смысле Лебега, так и в смысле Лебега относительно $\alpha(\Delta)$, и его мера во втором смысле равна

$$\mu g = \int_g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} [\beta(d_k) - \beta(c_k)] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{c_k}^{d_k} \beta'(t)\,dt = \int_g \beta'(t)\,dt,$$

и мы доказали формулу

$$\int_g d\mu = \int_g \beta'(t)\,dt. \tag{10}$$

Эта формула легко обобщается на любое множество $\mathscr{E}$, измеримое одновременно в обоих смыслах:

$$\int_{\mathscr{E}} d\mu = \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt. \tag{11}$$

Для этого достаточно взять нижнюю грань от обеих частей (10) по всем $g \supset \mathscr{E}$. Ведь

$$\int_{\mathscr{E}} d\mu = \mu\mathscr{E} = \inf_{g \supset \mathscr{E}} \mu g = \inf_{g \supset \mathscr{E}} \int_g d\mu.$$

С другой стороны, в силу неотрицательности $\beta'(x)$

$$\int_g \beta'(t)\,dt \geqslant \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt, \quad g \supset \mathscr{E},$$

и в силу измеримости $\mathscr{E}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое g, что (см. § 19.3 свойство 11 интеграла Лебега)

$$\int_g \beta'(t)\,dt = \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt + \int_{g-\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt < \int_{\mathscr{E}} \beta'(t)\,dt + \varepsilon.$$

Но равенство (11) можно обобщить.

Пусть мера μ *такова, что всякий раз, как некоторое множество* $e \subset [a, b]$ *измеримо в смысле* μ, *оно измеримо и в смысле*

Лебега. Тогда имеет место равенство

$$\int_{\mathscr{E}} f(x)\,d\mu = \int_{\mathscr{E}} f(x)\,\beta'(x)\,dx, \tag{12}$$

если существует интеграл слева.

В самом деле, пусть существует интеграл слева в (12). Тогда в силу свойства 17 из § 19.3 интеграла Лебега — Стилтьеса относительно $\alpha(\Delta)$ существует последовательность ступенчатых функций $\sigma_p(x)$ такая, что

$$\begin{gathered} \sigma_p(x) \to f(x) \text{ почти всюду на } [a, b], \\ \int_{\mathscr{E}} |f(x) - \sigma_p(x)|\,d\mu \to 0, \quad p \to \infty. \end{gathered} \tag{13}$$

Но тогда (пояснения ниже)

$$\int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(x)\,\beta'(x) - \sigma_q(x)\,\beta'(x)|\,dx = \int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(x) - \sigma_q(x)|\,\beta'(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(x) - \sigma_q(x)|\,d\mu \to 0, \quad p, q \to \infty,$$

где второе соотношение (равенство) верно в силу (11), потому что функции $|\sigma_p(x) - \sigma_q(x)|$ ступенчатые, а третье — в силу (13). На основании свойства 20 из § 19.3 полноты пространства $L(a, b)$ существует функция, к которой $\sigma_p(x)\beta'(x)$ стремится в смысле $L(a, b)$. Но так как $\sigma_p(x)\beta'(x) \to f(x)\beta'(x)$ почти всюду, то этой функцией должна быть $f(x)\beta'(x)$ (см. свойство 21 из § 19.3). Итак,

$$\int_{\mathscr{E}} |\sigma_p(x) - f(x)|\,\beta'(x)\,dx \to 0, \quad p \to \infty. \tag{14}$$

Из (13) и (14) и того факта, что для ступенчатых функций $\sigma_p(x)$

$$\int_{\mathscr{E}} \sigma_p(x)\,d\mu = \int_{\mathscr{E}} \sigma_p(x)\,\beta'(x)\,dx,$$

следует (12).

Наоборот, если $f(x)$, измеримая на $\mathscr{E}$ по Лебегу почти всюду конечная функция, и всякий раз, как некоторое множество $e \subset [a, b]$ измеримо по Лебегу, оно также измеримо в смысле μ, то существование интеграла справа в (12) влечет существование интеграла слева и равенство (12).

Доказательство этого утверждения проводится, как выше, в обратном порядке. Существование интеграла справа в (12) и неравенство $\beta'(x) \geqslant 0$ влечет существование последовательности ступенчатых функций $\sigma_p(x)$, для которой $\sigma_p(x) \to f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ и

$$\int\limits_{\mathscr{E}} |f(x) - \sigma_p(x)|\, \beta'(x)\, dx \to 0, \quad p \to \infty,$$

что доказывается подобно тому, как доказывалось свойство 17 из § 19.3, где надо всюду под интегралами заменить dx на $\mu'(x)dx$.

Отметим следующее утверждение.

Если неубывающая функция $\beta(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\beta(x') - \beta(x)| \leqslant M|x' - x|, \quad a \leqslant x,\ x' \leqslant b, \tag{14}$$

(M не зависит от x, x'), то из того, что какое-либо множество $e \subset [a, b]$ измеримо по Лебегу, следует измеримость его в смысле меры μ_β, порождаемой функцией $\beta(x)$.

Наоборот, если функция $y = \beta(x)$ имеет на $[a, b]$ обратную $x = \beta^{-1}(y)$, удовлетворяющую условию Липшица, то из того, что какое-либо множество $e \subset [a, b]$ измеримо в смысле μ_β, следует его измеримость по Лебегу.

В самом деле, произвольное открытое множество $g \subset [a, b]$ есть сумма самое большее счетного числа попарно непересекающихся интервалов (c_k, d_k), и потому, обозначая через μ меру Лебега, из (14) будем иметь

$$\mu_\beta g = \sum [\beta(d_k) - \beta(c_k)] \leqslant M \sum (d_k - c_k) = M\mu g. \tag{15}$$

Далее, если $\mathscr{E} \subset [a, b]$ — измеримое множество, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся F и g такие, что $F \subset \mathscr{E} \subset g$, $\mu(g - F) < \mathscr{E}$. Но $g - F$ открыто, поэтому, применяя к нему (14), получим

$$\mu_\beta(g - F) \leqslant M\mu(g - F) < M\varepsilon.$$

Таким бразом, и в смысле β мера $g - F$ может быть сделана как угодно малой. Но тогда $\mathscr{E}$ измеримо в смысле β.

Обратная часть утверждения доказывается аналогично.

В заключение напомним замечание к (3) в § 19.9.

Упражнения.

1. Пусть $\beta(x)$ — неубывающая на $[a, b]$ функция, порождающая неотрицательную аддитивную функцию

$$\alpha(\Delta) = \beta(d) - \beta(c), \quad \Delta = [c, d) \subset G = [a, b).$$

Показать, что, если $\beta(x)$ продолжить, положив $\beta(x) = \beta(a)$, $x < a$ и $\beta(x) = \beta(b)$, $x > b$, то продолженная функция порождает продолжение $\alpha(\Delta)$, полученное по правилу 19.8 (1).

Доказать равенства (μ лебегова мера относительно $\alpha(\Delta)$)

$$\mu(c, d) = \beta(d - 0) - \beta(c + 0),$$
$$\mu[c, d] = \beta(d + 0) - \beta(c - 0),$$
$$\mu[c, d) = \beta(d - 0) - \beta(c - 0),$$
$$\mu(c, d] = \beta(d + 0) - \beta(c + 0).$$

Таким образом, $\mu(\Delta) = \alpha(\Delta)$ тогда и только тогда, когда $\beta(c) = \beta(c - 0)$.

2. Пусть $G = \{a_i \leqslant x_i < b_i;\ i = 1, \ldots, n\}$, $\Delta = \{c \leqslant x_i < d_i;\ i = 1, \ldots, n\} \in G$, $\Delta_\varepsilon = \{c_i - \varepsilon \leqslant x_i < d_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, $\varepsilon > 0$. Доказать равенства

$$\mu\widetilde{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta' \subset\subset \Delta \\ \Delta' \to \Delta}} (\alpha\Delta'), \quad \mu\overline{\Delta} = \lim_{\substack{\Delta' \supset\supset \Delta \\ \Delta' \to \Delta}} \alpha(\Delta'), \quad \mu\Delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\Delta_\varepsilon).$$

§ 19.13. Продолжение функции. Теорема Вейерштрасса

Точки n-мерного пространства R_n будем обозначать через $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Пусть $\Omega \subset R_n$ есть ограниченная область с границей Γ, представляющей собой гладкую поверхность (дифференцируемое $(n-1)$-мерное замкнутое многообразие, см. 17.1)). Будем считать, что Γ есть сумма конечного числа связанных многообразий.

Точки Γ будем обозначать через $\mathbf{x}$. Нормаль к Γ в точке $\mathbf{x}$ состоит из двух выходящих из $\mathbf{x}$ лучей N_1 и N_2. Луч N_1 содержит достаточно малый интервал с концом $\mathbf{x}$, полностью принадлежащий Ω, луч же N_2 содержит в себе некоторый интервал с концом $\mathbf{x}$, не имеющий общих точек с Ω. Лучи N_1 и N_2 называются соответственно внутренней и внешней нормалями к Γ в точке $\mathbf{x}$ (см. § 17.2).

Пусть $\nu = \nu(\mathbf{x})$ есть выпущенный из $\mathbf{x} \in \Gamma$ единичный вектор внешней нормали к Γ. Он непрерывно зависит от $\mathbf{x}$ на Γ.

В самом деле, Ω есть n-мерное дифференцируемое связное многообразие, замыкание которого принадлежит связному же n-мерному многообразию, ориентированному уравнениями $v_1 = v_1, \ldots, v_n = v_n$. Поэтому (см. § 17.2, в частности, теорему 4 и дальше) Γ тоже есть ориентируемое многообразие, и можно высказать правило согласования ориентаций Ω и Γ, заключающееся в следующем.

Какова бы ни была точка $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, существует ее (n-мерная) окрестность $W_{\mathbf{x}^0}$ и определенное на ней локальное описание ориентированного многообразия R_n (см. 17.2 (18), (19))

$$v_i = \varphi_i(\mathbf{u}) = \varphi_i(u_1, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{u} \in \Omega, \tag{1}$$

со следующими свойствами:

1) Якобиан описания (1) (перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$) — положительный.

2) При достаточно малом $\delta > 0$ точки $\mathbf{v}$ являются внешними или внутренними по отношению к $\overline{\Omega}$ в зависимости от того, будет ли у них $u_1 > 0$ или $u_1 < 0$, где $|u_1| < \delta$.

3) Уравнения

$$x_i = \varphi_i(0, u_2, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

описывают (в рассматриваемой окрестности) Γ.

Совокупность всех получаемых таким образом описаний (2) многообразия Γ, ориентирует Γ, иначе говоря, любые два такие описания пересекающихся кусков σ, $\sigma' \subset \Gamma$ таковы, что на $\sigma\sigma'$ якобиан перехода друг в друга определяющих их параметров $(u_2, \ldots, u_n)$ и $\left(u_2', \ldots, u_n'\right)$ — положительный.

Введем единичный нормальный к Γ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ вектор $\nu = \nu(\mathbf{x})$, определяемый в пределах $W_{\mathbf{x}^0}$ формулами § 7.25, (3), где надо только заменить $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ на $(u_2, \ldots, u_n)$ и t на h. Из этих формул непосредственно видно, что в пределах окрестности $W_{\mathbf{x}^0}$ произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ вектор $\nu(\mathbf{x})$ непрерывно зависит от $\mathbf{x} \in \Gamma$. Но он непрерывен также и на всем многообразии Г. Это видно из тех же формул — на пересечении указанных кусков σ и σ' вектор ν — один и тот же, независимо от того, будем ли мы его вычислять, пользуясь параметрами $(u_2, \ldots, u_n)$ куска σ или параметрами $\left(u_2', \ldots, u_n'\right)$ куска σ'. Здесь существенно, что якобиан перехода от одних из этих параметров к другим — положительный.

Отметим, что вектор ν направлен вовне Ω. Ведь на Г

$$0 < \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} = \sum_1^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} A_i,$$

а вектор $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}\right)$ заведомо направлен вовне Ω.

Пусть теперь Г есть многообразие класса C^{r+1}, т. е. функции φ_i, описывающие его локально, непрерывно дифференцируемы $r+1$ раз. Тогда существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что равенство

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + h\nu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad |h| \leqslant \delta, \tag{3}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие

$$\mathbf{v} \rightleftarrows (\mathbf{x}, h), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad |h| \leqslant \delta, \tag{4}$$

непрерывно дифференцируемое r раз. Это надо понимать в том смысле, что если локально равенство (3) при помощи подстановки (2) записать в виде

$$\mathbf{v} \rightleftarrows (u_2, \ldots, u_n, h), \quad |h| \leqslant \delta, \tag{5}$$

то полученное соответствие (5) непрерывно дифференцируемо r раз.

Тот факт, что такое соответствие (5) действительно имеет место в некоторой окрестности произвольной точки $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$, доказан в § 7.25 (5). Воспользовавшись леммой Бореля, можно выбрать конечное число таких окрестностей, полностью покрывающих замкнутое ограниченное множество Г, но тогда при достаточно малом $\delta > 0$ будет иметь место (4) для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$.

Множество точек $\mathbf{v}$, определенных при помощи соотношений (3), обозначим через $\Pi(\delta)$ и положим $\Omega^\delta = \Omega + \Pi(\delta)$.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченное множество, граница которого есть $(n-1)$-мерное дифференцируемое многообразие класса C^2. Функцию $f(\mathbf{v})$, непрерывную на $\overline{\Omega}$, можно продолжить с $\overline{\Omega}$ на R_n так, что продолженная функция $\overline{f}(\mathbf{v})$ будет непрерывна на R_n и финитна в Ω^δ и будет выполняться неравенство*

$$|\overline{f}(\mathbf{v})| \leqslant \max_{\mathbf{v} \in R_n} |f(\mathbf{v})|. \tag{6}$$

$$\mathbf{v} \in \overline{\Omega}$$

Доказательство. На $\Omega\Pi(\delta)$ нашу функцию можно рассматривать как непрерывную функцию от $\mathbf{v}$ и от $(\mathbf{x}, h)$ $(f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, h),\ \mathbf{x} \in \Gamma)$.

Функция

$$f^*(\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{v}), & \mathbf{v} \in \Omega \backslash \Pi(\delta), \\ f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, h), & \mathbf{x} \in \Gamma, \quad -\delta \leqslant h \leqslant 0, \\ f(\mathbf{x}, h), & \mathbf{x} \in \Gamma, \quad 0 \leqslant h \leqslant \delta, \\ 0, & \mathbf{v} \notin \Omega^\delta, \end{cases} \tag{7}$$

очевидно, непрерывна на Ω^δ и продолжает f с $\overline{\Omega}$ на R_n.

Введем теперь непрерывную финитную в Ω^δ функцию $\psi(\mathbf{v})$, удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant \psi(\mathbf{v}) \leqslant 1$ и равную 1 на Ω (см. § 18.4, лемма 1). Очевидно, функция $\overline{f}(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}) f^*(\mathbf{v})$ удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Пусть на замыкании области, удовлетворяющий условиям теоремы* 1, *задана непрерывная функция* $f(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in \overline{\Omega})$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно определить многочлен* (*см.* 7.3, (2))

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leqslant k_j^* \leqslant N} a_k \mathbf{x}^k \quad \left(\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n),\ \mathbf{x}^k = (x_1^{k1} \ldots x_n^{k_n})\right),$$

такой, что выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| < \varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим продолжающую $f(\mathbf{x})$ (с $\overline{\Omega}$) функцию $\bar{f}(\mathbf{x})$, непрерывную и финитную в Ω^δ. Так как множество Ω^δ ограничено, то можно указать такое $l > 0$, что $\Delta = \{|x_j| \leqslant l,\ j = 1, \ldots, n\}$ содержит в себе Ω^δ. Если ввести подстановки

$$x_j = l \cos t_j, \quad 0 \leqslant t_j \leqslant \pi, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

то получим функцию

$$F(\mathbf{t}) = \bar{f}(l \cos t_1, \ldots, l \cos t_n),$$

которую можно считать определенной для любых $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$. Она непрерывна по $\mathbf{t}$ и четная периода 2π по каждой переменной t_j.

Сумма Фейера функции $F(\mathbf{t})$ есть некоторый четный тригонометрический полином

$$\sigma_N(t) = \sum_{0 \leqslant k_j \leqslant N} \alpha_k \cos k_1 t_1 \ldots \cos k_n t_n, \quad \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n),$$

равномерно при $N \to \infty$ сходящийся к $F(\mathbf{t})$ (см. § 15.11, теорема 1). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что выполняется неравенство $|F(\mathbf{t}) - \sigma_N(\mathbf{t})| < \varepsilon$ для всех $\mathbf{t}$.

Если в этом неравенстве обратно перейти от $\mathbf{t}$ к $\mathbf{x}$ (см. (9)), то получим

$$|\bar{f}(\mathbf{x}) - P(\mathbf{x})| < \varepsilon,$$

где $P(\mathbf{x})$ есть многочлен

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leqslant k_j \leqslant N} \alpha_k \cos k_1 \arccos \frac{x_1}{l} \ldots \cos k_n \arccos \frac{x_n}{l}$$

(см. § 15.12). Тем более верно неравенство (8), ведь $f(\mathbf{x}) = \bar{f}(\mathbf{x})$ на $\overline{\Omega}$.

Теорема 3. *Пусть область* Ω *точек* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *но с границей класса* C^{r+1}, *и на* $\overline{\Omega}$ *задана функция* $f(\mathbf{v}) \in C^r(\overline{\Omega})$, *т. е. имеющая на* $\overline{\Omega}$ *непрерывные частные производные до порядка* r *включительно. Тогда* $f(\mathbf{v})$ *можно продолжить с* $\overline{\Omega}$ *на* R_n *так, что продолженная функция* $\bar{f}(\mathbf{v})$ *принадлежит* $C^r(R_n)$, *финитна в* Ω^δ *и удовлетворяет неравенству*

$$\left|\bar{f}^{(\mathbf{k})}_{\mathbf{v} \in R_n}(\mathbf{v})\right| \leqslant C \sum_{|\mathbf{s}| \leqslant r} \max_{\mathbf{v} \in \overline{\Omega}} |f^{(s)}(\mathbf{v})|, \quad |\mathbf{k}| \leqslant r,$$

где C *не зависит от* f *и* $\mathbf{v}$.

Доказательство. Определяем на Ω^δ функцию

$$f_*(\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{v}), & \mathbf{v}\in\Omega\setminus\Pi(\delta),\\ f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x},h), & -\delta\leqslant h\leqslant 0,\\ \sum\limits_{s=0}^{l}\lambda_s f\left(\mathbf{x}, -\dfrac{h}{s+1}\right), & 0\leqslant h\leqslant\delta,\\ 0, & \mathbf{v}\notin\Omega^\delta; \end{cases} \tag{10}$$

где числа λ_s одновременно удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{s=0}^{l}\lambda_s\left(-\frac{1}{s+1}\right)^k = 1 \qquad (k=0,1\,\ldots,r).$$

Легко проверить, что $f^*(\mathbf{v})$ имеет на Ω^δ непрерывные частные производные порядков вплоть до r включительно. А функция

$$\bar{f}(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v})f^*(\mathbf{v})$$

удовлетворяет условиям теоремы, если за $\psi(\mathbf{v})$ взять r раз непрерывно дифференцируемую на R_n функцию, финитную в Ω^δ и такую, что $\psi(\mathbf{v})=1$ на $\overline{\Omega}$ и $0\leqslant\psi(\mathbf{v})\leqslant 1$ на R_n (см. § 18.4, лемма 1).

Замечание. Теоремы 1—3 можно доказать при менее ограничительных условиях на Ω, но тогда продолжения $f^*(\mathbf{v})$ пришлось бы строить путями, отличными от (7) и (10).

Глава 20

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 20.1. Линейные операторы

Пусть E и E' обозначают линейные нормированные пространства и каждому элементу x из E, в силу некоторого закона, соответствует элемент

$$y = u(x),$$

принадлежащий E'; тогда говорят, что u есть оператор, определенный в E и отображающий E в E'.

Оператор называется *аддитивным*, если для любых элементов x и y из E справедливо

$$u(x+y) = u(x) + u(y).$$

Если θ и θ' соответственно обозначают нулевые элементы пространств E и E' и $x \in E$, то для аддитивного оператора справедливо

$$u(\theta) = \theta', \quad u(-x) = -u(x). \tag{1}$$

Действительно,

$$u(\theta) = u(2\theta) = 2u(\theta),$$

откуда следует первое равенство. Далее,

$$\theta' = u(x-x) = u(x) + u(-x),$$

что влечет второе.

Оператор называется *однородным*, если для любого действительного (комплексного) числа α и любого элемента $x \in E$ имеет место

$$u(\alpha x) = \alpha u(x).$$

Оператор называется *непрерывным в* $x_0 \in E$, если для любой последовательности x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, принадлежащей E и сходящейся к x_0, справедливо

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = u(x_0).$$

Оператор называется *непрерывным*, если он непрерывен в любом элементе $x \in E$.

Из аддитивности оператора и непрерывности его в одном из элементов $x_0 \in E$ следует его непрерывность. Действительно, если $y_0 \in E$, $y_k \in E$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $y_k \to y_0$, то

$$\lim_{k\to\infty} u(y_k) = \lim u[(y_k - y_0 + x_0) - (x_0 - y_0)] =$$
$$= u(x_0) - u(x_0 - y_0) = u(y_0).$$

Далее, из аддитивности оператора и непрерывности его следует однородность относительно умножения на вещественное число*). В самом

---

*) В комплексном пространстве однородность оператора относительно умножения на комплексное число вытекает из его аддитивности, непрерывности и свойства $u(ix) = iu(x)$

деле, если $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, то равенство

$$u(\alpha x) = \alpha u(x) \tag{2}$$

является непосредственным следствием аддитивности оператора u. Если p и q — целые положительные числа, то

$$qu\left(\frac{1}{q}x\right) = u(x),$$

откуда

$$u\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{1}{q}u(x), \quad u\left(\frac{p}{q}x\right) = pu\left(\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}u(x).$$

Пусть теперь α — произвольное положительное число и последовательность рациональных чисел r_k сходится к α; тогда вследствие доказанного и непрерывности оператора

$$u(\alpha x) = \lim_{k\to\infty} u(r_k x) = \lim_{k\to\infty} r_k u(x) = \alpha u(x).$$

Это равенство на основании (1) сохраняется, очевидно, также и для отрицательных α.

Теорема 1. *Для того чтобы аддитивный оператор u был непрерывным, необходимо и достаточно существование положительной константы M такой, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство*

$$\|u(x)\| \leqslant M\|x\|. \tag{3}$$

Доказательство. Условие (3) достаточно, так как если последовательность элементов x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ из E сходится к $x_0 \in E$, то из неравенства

$$\|u(x_k - x_0)\| \leqslant M\|x_k - x_0\| \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k) = u(x_0).$$

Оно необходимо, так как в противном случае существует в E последовательность элементов x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой $\|u(x_n)\| \geqslant n\|x_n\|$, и, следовательно,

$$\|u(z_n)\| > 1, \quad z_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}, \quad z_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

что противоречит непрерывности оператора u.

Аддитивный непрерывный оператор u называется *линейным* или еще *линейным ограниченным*.

Наименьшая положительная константа M, при которой выполняется неравенство (3) для всех $x \in E$, называется *нормой* линейного оператора u и обозначается $\|u\|$. Легко видеть, что норму u можно еще определить как верхнюю грань норм элементов $u(x)$, распространенную на множество всех $x \in E$ с $\|x\| \leqslant 1$ или с $\|x\| = 1$:

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

Банахово, т. е. линейное нормированное полное пространство будем называть еще *пространством типа* (B).

Если u и v — линейные операторы, отображающие пространство E типа (B) в пространство E' типа (B), и α — произвольное число, то очевидно

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \quad \|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|.$$

§ 20.2. Линейные функционалы

Множество R всех действительных чисел с обычным определением сложения и умножения, где норма числа равна абсолютному его значению, есть, очевидно, пространство типа (B).

Если оператор F отображает нормированное пространство E в R, он называется *функционалом*, определенным в E. Аддитивный и непрерывный функционал, определенный в пространстве E типа (B), называется *линейным функционалом*. Свойства, установленные для линейных операторов, остаются, очевидно, справедливыми и для линейных функционалов.

§ 20.3. Сопряженное пространство

Совокупность всех определенных на E линейных функционалов образует пространство $\bar{E}$, называемое *сопряженным* к E, если в качестве нормы элемента этого пространства — функционала F — взять определенную уже норму $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |F(x)|$. $\bar{E}$ есть пространство типа (B), таким образом, полное (независимо от того, E полное или нет). В самом деле, если последовательность линейных функционалов F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех p, $q > N$ $\|F_p - F_q\| < \varepsilon$, то очевидно, $F_n(x)$ сходится равномерно на сфере $\|x\| \leqslant 1$ к некоторому линейному функционалу F, определенному в E, и таким образом, $\|F_n - F\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Сформулируем без доказательства теорему.

Теорема (*о продолжении линейного функционала*). *Пусть E — банахово пространство и E_1 его линейное подпространство* $(E_1 \subset E)$.

Линейный функционал $f(x)$, определенный на E_1, можно продолжить на E с сохранением нормы, т. е. определить на E_1 такой линейный функционал $f_1(x)$, что будут выполняться свойства

$$f_1(x) = f(x), \quad x \in E_1, \quad \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f_1(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|.$$

§ 20.4. Линейный функционал в пространстве C непрерывных функций

Теорема (Рисса*)). *Для всякого линейного функционала F, определенного в пространстве C действительных непрерывных функций $x = x(t)$, заданных на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке и притом единственная действительная функция $g(t)$, удовлетворяющая условиям:*

1) *$g(t)$ ограниченной вариации на $[a, b]$ и непрерывна справа для* $a < t < b$,

2) $g(a) = 0$,

3) *функционал F для всех $x = x(t)$ из C представляется в виде интеграла Стилтьеса*

$$F(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t), \tag{1}$$

4) *норма функционала F равна полной вариации функции g на* $[a, b]$:

$$\|F\| = \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g. \tag{2}$$

---

*) Ф. Рисс (1880—19   ) выдающийся венгерский математик.

Наоборот, функция $g(t)$, удовлетворяющая названным свойствам, определяет с помощью (1) *линейный функционал в пространстве C.*

Доказательство. Пусть задан линейный функционал на пространстве C. Последнее можно рассматривать, как подпространство пространства $L_\infty = L_\infty\ [a, b]$ ограниченных функций, определенных на сегменте $[a, b]$ (стр. 377, сноска). Продолжим линейный функционал F на пространство L_∞ с сохранением нормы, что всегда возможно (см. § 20.3).

Определим далее на $[a, b]$ семейство функций $x_s = x_s(t)$ следующим образом:

$$x_s(t) = \begin{cases} 0, & s < t \leqslant b, \\ 1, & a \leqslant t \leqslant s, \end{cases} \quad a < s \leqslant b, \quad x_a(t) \equiv 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Очевидно, $x_s \in L_\infty$. Положим

$$g(s) = F(x_s), \qquad a \leqslant s \leqslant b,$$

и покажем, что функция $g(s)$ ограниченной вариации на $[a, b]$. Действительно, пусть $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |g(s_i) - g(s_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left|F\left(x_{s_i}\right) - F\left(x_{s_{i-1}}\right)\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|F\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)\right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F\left[\eta_i\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)\right] = F\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)\right],$$

где

$$\eta_i = \operatorname{sign} F\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Но функция

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i\left(x_{s_i} - x_{s_{i-1}}\right)$$

представляет, очевидно, ступенчатую функцию с нормой, не превышающей единицы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} |g(s_i) - g(s_{i-1})| \leqslant \|F\|,$$

следовательно,

$$\operatorname*{var}_{a \leqslant t \leqslant b} g \leqslant \|F\|. \tag{3}$$

Легко видеть, что функция

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[x_{s_i}(t) - x_{s_{i-1}}(t)\right] \quad (a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b)$$

является ступенчатой функцией, определенной равенствами

$$x(t) = \begin{cases} \alpha_1, & s_0 \leqslant t \leqslant s_1, \\ \alpha_i, & s_{i-1} < t \leqslant s_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для нее очевидно

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[g(s_i) - g(s_{i-1})\right].$$

Если теперь $x = x(t)$ — произвольная непрерывная функция, то ее можно рассматривать как предел равномерно сходящейся к ней последовательности ступенчатых функций вида

$$x_n = x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x(s_i)\left[x_{s_i}(t) - x_{s_{i-1}}(t)\right],$$

когда $\max|s_i - s_{i-1}|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ стремится к нулю.

Таким образом, $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и, вследствие непрерывности линейного функционала F,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{\max|s_i - s_{i-1}|\to 0} \left\{\sum_{i=1}^{n} x(s_i)\left(x_{s_i} - x_{s-1}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{s_i - s_{i-1}\to 0} \sum_{i=1}^{n} x(s_i)\left[g(s_i) - g(s_{i-1})\right] = \int_a^b x(t)\, dg(t) \qquad (4)$$

для всех $x \in C$. Очевидно,

$$|F(x)| = \left|\int_a^b x(t)\, dg(t)\right| \leqslant \operatorname{var} g \|x\|,$$

какова бы ни была функция $x \in C$. Поэтому

$$\|F\| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g. \qquad (5)$$

Из (5) и (3) тогда следует (2). Далее, очевидно,

$$g(a) = F(x_a) = 0.$$

Мы, таким образом, показали существование функции g ограниченной вариации на $[a, b]$, удовлетворяющей условиям 2) — 4) теоремы.

Введем теперь в рассмотрение функцию g_*, определенную следующим образом:

$$g_*(a) = g(a) = 0, \quad g_*(b) = g(b),$$
$$g_*(t) = g(t+0) \quad \text{для} \quad a < t < b.$$

Эта функция, таким образом, непрерывна справа для $a < t < b$ и отличается от g на счетном множестве значений t, удовлетворяющих неравенству $a < t < b$. Поэтому на основании свойств интеграла Стилтьеса

$$\int_a^b x(t)\, dg_*(t) = \int_a^b x(t)\, dg(t).$$

Очевидно, далее,

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_* \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g = \|F\|. \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$|F(x)| = \left|\int_a^b x(t)\, dg_*(t)\right| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_* \|x\|,$$

откуда

$$\|F\| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_*; \qquad (7)$$

Неравенства (6) и (7) влекут за собой

$$\|F\| = \operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g_*.$$

Таким образом, функция g_* удовлетворяет всем условиям теоремы. Такая функция может быть только одна. В самом деле, допустим, что функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы и $g_1(t_0) \neq g_2(t_0)$. Тогда разность

$$h(t) = g_1(t) - g_2(t)$$

есть функция ограниченной вариации, непрерывная справа для $a < t < b$ и удовлетворяющая условиям

$$h(a) = 0, \quad \int_a^b x(t)\, dh(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in C, \qquad (8)$$
$$h(t_0) \neq 0, \quad t_0 > a.$$

Но это невозможно, так как если $t_0 = b$, то для $x(t) = 1$

$$\int_a^b x(t)\, dh(t) = h(b) \neq 0,$$

и если $t_0 < b$, то в силу непрерывности справа функции h можно подобрать достаточно малое положительное δ такое, что

$$\operatorname*{var}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\delta} h < |h(t_0)|.$$

Тогда для непрерывной функции $x(t)$, определяемой условиями

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad a \leqslant t \leqslant t_0, \\ \text{линейна} & \text{для} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta, \\ 0 & \text{для} \quad \delta + t_0 \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

мы имели бы

$$\left| \int_a^b x(t)\, dh \right| = \left| \int_a^{t_0} x(t)\, dh + \int_{t_0}^{t_0+\delta} x(t)\, dh \right| \geqslant |h(t_0)| - \operatorname*{var}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\delta} h > 0,$$

что противоречит (8).

Итак, первая часть теоремы доказана. Вторая часть (обратная) очевидна.

Пример. Интеграл $F(f) = \int_a^b K(t) f(t)\, dt$, где $K(t)$ — суммируемая, а f — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, представляет собой линейный функционал, определенный в пространстве C непрерывных функций, определенных на $[a, b]$ с нормой

$$\|F\| = \int_a^b |K(t)|\, dt.$$

В этом нетрудно убедиться непосредственно или прибегая к теореме 2.1, если принять во внимание, что для всех $f \in C$

$$F(f) = \int_a^b f(t)\, dg(t),$$

где

$$g(t) = \int_a^t K(u)\,du,$$

а также, что

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant t\leqslant b} g = \int_a^b |K(t)|\,dt.$$

Пример 2. Пусть $a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b$ и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа; тогда

$$F(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(t_i),$$

где $f \in C$, есть линейный функционал, определенный в C с нормой

$$\|F\| = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i|.$$

Его можно представить в виде интеграла Стилтьеса 20.4 (1), где $g(t)$ — функция, непрерывная справа на (a, b), равная нулю для $t = a$, постоянная в каждом из интервалов (t_i, t_{i+1}) $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, а в точках t_i терпит скачки, равные α_i, иначе говоря

$$g(t_0 + 0) - g(t_0) = \alpha_0,$$

$$g(t_i + 0) - g(t_i - 0) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 20.5. Линейный функционал в пространстве L интегрируемых функций

Теорема 1. *Всякому линейному функционалу F, определенному в пространстве L функций f, интегрируемых на $[a, b]$ по Лебегу, соответствует единственная с точностью до меры нуль измеримая и ограниченная на $[a, b]$ действительная функция $\alpha(t)$ такая, что*

$$F(f) = \int_a^b \alpha(t) f(t)\,dt \tag{1}$$

и (см. стр. 377, сноску)

$$\|F\| = \operatorname*{vrai\,max}_{a\leqslant t\leqslant b} |\alpha(t)|. \tag{2}$$

Доказательство. Определим функцию

$$G_t(u) = \begin{cases} 1, & a \leqslant u \leqslant t, \\ 0, & t \leqslant u \leqslant b \end{cases}$$

и положим $g(t) = F(G_t)$. Пусть $a \leqslant t < t' \leqslant b$ и

$$\varepsilon = \operatorname{sign}[g(t') - g(t)].$$

Тогда

$$|g(t') - g(t)| = \varepsilon\{g(t') - g(t)\} = \varepsilon F(G_{t'} - G_t) \leqslant \|F\|\,\|G_{t'} - G_t\|.$$

Но функция $G_{t'} - G_t$ равна единице на интервале (t, t') и нулю вне его, поэтому $\|G_{t'} - G_t\| = |t' - t|$, $|g(t') - g(t)| \leqslant \|F\|\,|t' - t|$.

Следовательно, $g(t)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица с константой $\|F\|$, что, как можно доказать, влечет за собой существование почти всюду на $[a, b]$ производной $g'(t) = \alpha(t)$ с

$$\operatorname*{vrai\ max}_{a \leqslant t \leqslant b} |\alpha(t)| \leqslant \|F\|. \tag{3}$$

Кроме этого, в силу того, что $F(G_a) = 0$,

$$g(t) = \int_a^t \alpha(u)\, du,$$

откуда

$$F(G_t) = g(t) = \int_a^b \alpha(u)\, G_t(u)\, du.$$

Если f есть ступенчатая функция, определенная на $[a, b]$, то она представляет собой некоторую конечную линейную комбинацию из функций G_t и потому

$$F(b) = \int_a^b \alpha(u)\, f(u)\, du.$$

Пусть теперь f — произвольная функция из L. Существует последовательность ступенчатых f_n $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся по норме к f, откуда

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \alpha(u)\, f_n(u)\, du = \int_a^b \alpha(u)\, f(u)\, du,$$

что и требовалось доказать.

Из последнего равенства следует

$$|F(f)| \leqslant \operatorname*{vrai\ max}_{a \leqslant t \leqslant b} |\alpha(t)| \cdot \|f\|,$$

что вместе с (3) влечет (2).

Не может быть двух функций $\alpha(t)$ и $\alpha_1(t)$, удовлетворяющих условию теоремы и отличающихся на множестве положительной меры, потому что, полагая $\beta(t) = \alpha(t) - \alpha_i(t)$, мы имели бы, с одной стороны,

$$\int_a^b \beta(t)\, f(t)\, dt = 0$$

для всех $f \in L$, а с другой — для $f_*(t) = \operatorname{sign} \beta(t)$

$$\int_a^b f(t)\, f_*(t)\, dt = \int_a^b \beta(t) \operatorname{sign} \beta(t)\, dt = \int_a^b |\beta(t)|\, dt > 0.$$

§ 20.6. Линейный функционал в гильбертовом пространстве

Пусть H есть гильбертово пространство, т. е. линейное нормированное полное пространство, в котором введено скалярное произведение (φ, ψ) $(\varphi, \psi \in H)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H = (\varphi, \varphi)^{1/2}.$$

В данном случае считаем, что H есть сепарабельное пространство. В нем, таким образом, имеется счетная полная ортонормированная система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ H может быть комплексным или действительным.

Теорема 1. *Для всякого линейного функционала $F = F(\varphi)$, определенного над H, существует единственный элемент $\psi \in H$ такой, что**)

$$F(\varphi) = (\varphi, \psi) \quad (\varphi \in H) \tag{1}$$

для всех $\varphi \in H$.

При этом имеет место равенство

$$\|F\| = \|\psi\|_H. \tag{2}$$

Доказательство. Произвольный элемент $\varphi \in H$ разложим в ряд Фурье по полной ортонормированной системе:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_k)\, \varphi_k.$$

Но тогда, учитывая непрерывность линейного функционала F, получим:

$$F(\varphi) = \lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{k=1}^{N} (\varphi, \varphi_k)\, \varphi_k\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (\varphi, \varphi_k)\, F(\varphi_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi, \varphi_k), \quad c_k = F(\varphi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Мы доказали, что заданный линейный функционал F может быть описан равенством

$$F(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi, \varphi_k),$$

где числа c_k определяются равенствами (3).

Очевидно, справедливо также неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi, \varphi_k)\right| \leqslant \|F\| \|\varphi\|_H \quad (\varphi \in H). \tag{4}$$

Элемент $\varphi = \sum_{j=1}^{N} \overline{c}_j \varphi_j$ для любого натурального N принадлежит H. Подставив его выражение в (4), получим

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \overline{c}_k \leqslant \|F\| \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\right)^{1/2}$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \leqslant \|F\|^2$$

при любом N. Но тогда имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|F\|^2. \tag{5}$$

---

*) В комплексном H скалярное произведение (φ, ψ) есть линейный функционал по φ, но не есть линейный функционал по ψ, потому что он не однороден по ψ.

Но $|\bar{c}_k| = |c_k|$, поэтому справедливо также неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{c}_k|^2 \leqslant \|F\|, \tag{5'}$$

откуда вытекает (см. § 14.6, теорема 4) существование элемента $\psi \in H$ такого, что

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k \varphi_k,$$

где ряд справа сходится к ψ в смысле H.

При этом

$$\|\psi\|_H = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Теперь имеем для любого $\varphi \in H$

$$(\varphi, \psi) = \left(\varphi, \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\varphi, \varphi_k) = F(\varphi),$$

т. е. равенство (1).

Далее из (5) и (6) следует

$$\|\psi\|_H \leqslant \|F\|, \tag{7}$$

а из (1) следует

$$|F(\varphi)| = |(\varphi, \psi)| \leqslant \|\psi\|_H \|\varphi\|_H, \quad \|F\| \leqslant \|\psi\|_H. \tag{8}$$

Но тогда имеет место равенство (2).

Единственность элемента $\psi \in H$, для которого выполняется равенство (1) для всех $\varphi \in H$, вытекает из следующих соображений.

Если бы существовал еще один элемент $\psi_1 \in H$, для которого выполнялось бы равенство $F(\varphi) = (\varphi, \psi_1)$ для всех $\varphi \in H$, то для всех $\varphi \in H$ выполнялось бы равенство

$$(\varphi, \psi - \psi_1) = 0,$$

и в частности для $\varphi = \psi - \psi_1$

$$(\psi - \psi_1, \ \psi - \psi_1) = 0.$$

Но тогда $\psi - \psi_1 = 0$ или $\psi = \psi_1$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Сергей Михайлович Никольский

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том II

Редактор *М. М. Горячая*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *Е. В. Сидоркина, В. П. Сорокина*

ИБ № 11784

Сдано в набор 15.12.82. Подписано к печати 13.09.83. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 29,6. Тираж 40 000 экз. Заказ № 520. Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука».
630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25