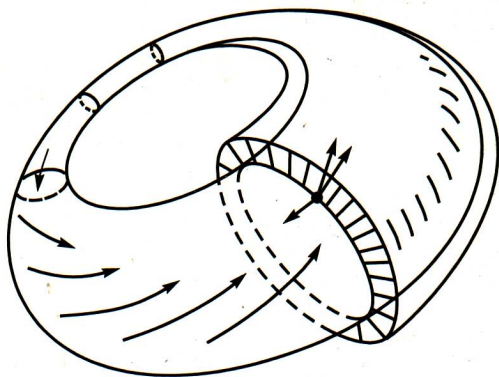


А. Т. Фоменко

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
И ТОПОЛОГИЯ**

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ



А. Т. ФОМЕНКО

Дифференциальная геометрия
и топология
Дополнительные главы

Редакция журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»

Издательский дом
«Удмуртский университет»

1999

УДК 513.73+513.83(076)
ББК 22.15

Библиотека «Математика»
Том 3

Фоменко А. Т.

Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 1999. — 252 с.

Книга написана на основе курсов по дифференциальной геометрии, топологии и смежным вопросам, читаемых на механико-математическом факультете МГУ. Книга содержит материал, ставший фактически учебным и в то же время широко использующийся в современной научной литературе. Основное внимание уделено элементам гомотопической топологии, теории критических точек гладких функций на многообразиях, описанию наиболее важных типов гладких многообразий, часто использующихся в приложениях, изучению геометрии и топологии групп Ли, а также изложению элементов теории интегрирования гамильтоновых систем на симплектических многообразиях.

ББК 22.15



Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»
<http://www.rcd.com.ru>

- © А. Т. Фоменко, 1999
- © Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 1999

Содержание

Предисловие	6
Глава 1. Клеточные комплексы, гомологии	8
§ 1. Клеточные комплексы и их простейшие свойства	8
1. Первые определения (8). 2. Примеры клеточных комплексов (9).	
§ 2. Группы сингулярных гомологий	12
1. Сингулярные симплексы, граничный оператор, группы гомологий (12). 2. Цепные комплексы, цепная гомотопия, гомотопическая инвариантность групп гомологий (15).	
Глава 2. Критические точки гладких функций на многообразиях	19
§ 3. Критические точки и геометрия поверхностей уровня	19
1. Определение критических точек (19). 2. Каноническое представление функции в окрестности невырожденной критической точки (21). 3. Топологическая структура поверхностей уровня функции в окрестности критических точек (24). 4. Представление многообразия в виде клеточного комплекса, связанное с функцией Морса (27). 5. Операция приклейки ручек и разложение компактного многообразия в сумму ручек (29).	
§ 4. Точки бифуркации и их связь с гомологиями	33
1. Определение точек бифуркации (33). 2. Теорема, связывающая полиномы Пуанкаре функции и многообразия (36). 3. Некоторые следствия (38). 4. Критические точки функций на двумерных многообразиях (42).	
§ 5. Критические точки функций и категория многообразия	48
1. Определение категории (48). 2. Топологические свойства категории (49). 3. Формулировка теоремы о нижней границе числа точек бифуркации (52). 4. Доказательство теоремы (54). 5. Примеры вычисления категории (57).	

§ 6.	Правильные функции Морса и бордизмы	62
	1. Бордизмы (62). 2. Разложение бордизма в композицию элементарных бордизмов (63). 3. Градиентно-подобные поля и сепаратрисные диски (66). 4. Перестройки поверхностей уровня гладкой функции (67). 5. Построение правильных функций Морса (70). 6. Двойственность Пуанкаре (77).	
ГЛАВА 3.	Топология трехмерных многообразий	83
§ 7.	Каноническое представление трехмерных многообразий	83
	1. Правильные функции Морса и диаграммы Хегора (83). 2. Примеры диаграмм Хегора (85). 3. Кодирование трехмерных многообразий при помощи сетей (88). 4. Сети и сепаратрисные диаграммы (92).	
§ 8.	Задача распознавания трехмерной сферы	94
	1. Гомологические сферы (94). 2. Гомотопические сферы (100).	
§ 9.	Об алгоритмической классификации многообразий	103
	1. Фундаментальные группы трехмерных многообразий (103). 2. Фундаментальные группы четырехмерных многообразий (104). 3. О невозможности классификации гладких многообразий в размерностях, больших, чем три (106).	
ГЛАВА 4.	Симметрические пространства	110
§ 10.	Основные свойства симметрических пространств, их модели и группы изометрии	110
	1. Определение симметрических пространств (110). 2. Группы Ли как симметрические пространства (110). 3. Свойства тензора кривизны (112). 4. Инволютивные автоморфизмы и связанные с ними симметрические пространства (113). 5. Картановская модель симметрического пространства (115). 6. Геометрия картановских моделей (118). 7. Некоторые важные примеры симметрических пространств (121).	
§ 11.	Геометрия групп Ли	126
	1. Полупростые группы и алгебры Ли (126). 2. Картановские подалгебры (128). 3. Корни полупростой алгебры Ли и ее корневое разложение (130). 4. Некоторые свойства системы корней (133). 5. Системы корней простых алгебр Ли (139).	
§ 12.	Компактные группы	143
	1. Вещественные формы (143). 2. Компактная форма (145).	
§ 13.	Орбиты присоединенного представления	153
	1. Орбиты общего положения и сингулярные орбиты (153). 2. Орбиты в группах Ли (157). 3. Доказательство теоремы сопря-	

женности максимальных торов в компактной группе Ли (159).
4. Группа Вейля и ее связь с орбитами (168).

Глава 5. Симплектическая геометрия	172
§ 14. Симплектические многообразия	172
1. Симплектическая структура и ее каноническое представление. Кососимметрический градиент (172). 2. Гамильтоновы векторные поля (176). 3. Скобка Пуассона и интегралы гамильтоновых полей (178). 4. Теорема Лиувилля (коммутативное интегрирование гамильтоновых систем) (182).	
§ 15. Некоммутативное интегрирование гамильтоновых систем	188
1. Некоммутативные алгебры Ли интегралов (188). 2. Теорема о некоммутативном интегрировании (190). 3. Редукция гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями (193). 4. Орбиты (ко)присоединенного представления как симплектические многообразия. (202).	
Глава 6. Геометрия и механика	204
§ 16. Вложение гамильтоновых систем в алгебры Ли	204
1. Постановка задачи и полные коммутативные наборы функций (204). 2. Уравнения движения многомерного твердого тела с закрепленной точкой и их аналоги на полупростых алгебрах Ли. Комплексная полупростая серия (208). 3. Гамильтоновы системы компактной и нормальной серий (213). 4. Секционные операторы и соответствующие им динамические системы на орбитах (217). 5. Уравнения движения многомерного твердого тела по инерции в идеальной жидкости (221).	
§ 17. Полная интегрируемость некоторых гамильтоновых систем на алгебрах Ли	228
1. Метод сдвига аргумента и построение коммутативных алгебр интегралов на орбитах в алгебрах Ли (228). 2. Примеры для алгебр Ли so_3 и so_4 . (234). 3. Случаи полной интегрируемости уравнений движения многомерного твердого тела с закрепленной точкой в отсутствие силы тяжести и полная интегрируемость их аналогов на полупростых алгебрах Ли (238). 4. Случаи полной интегрируемости уравнений движения многомерного твердого тела по инерции в идеальной жидкости (242). 5. Конечномерные аппроксимации уравнений магнитной гидродинамики и случаи их полной интегрируемости (245).	
Литература	247

Предисловие

Дифференциальная геометрия и топология — это одна из самых молодых и в то же время одна из самых развитых областей современной математики. Возникшая на стыке нескольких научных направлений, среди которых следует в первую очередь выделить классический анализ, алгебру, геометрию, механику и теоретическую физику, эта новая отрасль математических знаний быстро разрослась в ветвистое дерево, плоды которого оказались чрезвычайно полезными не только для внутренних целей математики, но и для многочисленных приложений, некоторые из которых будут затронуты на страницах настоящей книги. Имея стольких «родителей», современная дифференциальная геометрия и топология, естественно, унаследовала многие их черты, но, являясь в то же время новым математическим организмом, она наделена яркой индивидуальностью, важнейшим качеством которой можно, по-видимому, назвать универсализм и синтетичность используемых методов и идей. Здесь переплетаются геометрические идеи и наглядность, алгебраический язык, функциональные и дифференциальные методы и т. д. Эта синтетичность в постановке и методах решения задач в какой-то мере перекликается с универсализмом естественных наук эпохи Возрождения, когда математика, механика и астрономия воспринимались как единая система знаний о законах окружающего мира. Не претендуя на такую широту, современная геометрия позволяет тем не менее решать многие прикладные задачи фундаментального значения.

Цель настоящей книги — дать краткое изложение некоторых геометрических и дифференциальных методов, широко используемых как в теоретических исследованиях, так и в многочисленных приложениях.

Имея в виду эту цель, мы начинаем книгу с описания важного класса математических объектов — так называемых клеточных комплексов, естественно возникающих во многих конкретных задачах, например при изучении поверхностей уровня гладких функций на многообразиях. В рамках круга вопросов, связанных с изучением комплексов, приходится часто решать задачу: «одинаковы» два комплекса или нет. Это приводит к необходимости нахождения инвариантов, одинаковых для гомотопически эквивалентных комплексов.

Одним из таких инвариантов являются группы гомологий и когомологий, использующиеся в гл. 2, 3.

В настоящей книге предпочтение отдается изложению практической стороны применения тех или иных методов, вопросы же их формального теоретического распространения на «максимально общий случай» (являющиеся часто технически довольно громоздкими) излагаются более сжато, и в некоторых таких ситуациях мы отсылаем читателя к более специальной литературе. Так, например, при изложении теории корней полупростых алгебр Ли мы демонстрируем все основные эффекты этой теории на модельном примере группы Ли невырожденных матриц с определителем, равным единице, и на примерах классических компактных матричных групп и алгебр Ли, не углубляясь в некоторые нетривиальные вопросы распространения всех доказательств на общий случай.

То обстоятельство, что рассматриваемые нами вопросы находятся на стыке нескольких математических дисциплин, обусловило и синтетичность архитектуры книги. В изложении материала переплетаются следующие темы: комплексы, гомологии, теория критических точек гладких функций на многообразиях, бордизмы, топология трехмерных многообразий, группы и алгебры Ли, теория корней полупростых алгебр Ли, симплектическая геометрия, гамильтоновы системы, проблемы интегрирования механических систем (например, уравнений движения многомерного твердого тела с неподвижной точкой).

Подбор и расположение материала соответствуют специальному курсу, читавшемуся автором для студентов механико-математического факультета Московского государственного университета (математиков и механиков), и сложившейся практике чтения обязательного курса дифференциальной геометрии и топологии для студентов-математиков. Настоящая книга является естественным продолжением книги Б. А. Дубровина, С. П. Новикова, А. Т. Фоменко «Современная геометрия» [1] и учебника А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко «Курс дифференциальной геометрии и топологии» [2], поэтому мы опираемся на некоторые факты, изложенные в этих книгах. Тем не менее практически все разделы настоящей книги могут читаться самостоятельно, без опоры на другую литературу.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математиков и механиков, а также для специалистов смежных дисциплин, интересующихся приложениями современной геометрии.

ГЛАВА 1

Клеточные комплексы, гомологии

§ 1. Клеточные комплексы и их простейшие свойства

1. Первые определения

Многие задачи механики, теоретической физики приводят к необходимости изучать свойства гладких многообразий; эти объекты часто появляются уже на первых стадиях анализа той или иной конкретной прикладной задачи. Наряду с многообразиями довольно часто уже на первых этапах исследования возникают объекты иного рода — так называемые клеточные комплексы, организованные локально не столь жестко, как гладкие многообразия (потому что не обладающие многими их свойствами), но являющиеся иногда более гибким аппаратом, позволяющим обнаружить те или иные инварианты изучаемой задачи. Простейшим примером являются поверхности уровня гладкой функции, заданной на многообразии, например, поверхности уровня потенциальной функции или полной энергии. Эти поверхности возникают в физике как «уровни», по которым движутся траектории механических систем с постоянной энергией (с важными примерами мы познакомимся ниже), однако эти «уровни» могут иметь особые точки, т. е. не являются многообразиями. Тем не менее они являются клеточными комплексами, которые тем самым дают некоторое естественное расширение класса многообразий (как мы увидим, любое многообразие является клеточным комплексом).

Сначала дадим неформальное описание клеточных комплексов. Как и многообразия, они «склеены» из открытых шаров, но в случае многообразия эти шары склеиваются при помощи гомеоморфизмов (на общей части), а в случае клеточных комплексов каждый следующий шар приклеивается по своей границе к уже построенной части комплекса при помощи непрерывного отображения границы шара, причем отображение это не обязано быть гомеоморфизмом границы с ее образом, т. е.

на границе допускаются склейки разной степени сложности. Это ослабление требования склейки «элементарных кирпичей» — шаров — резко расширяет запас конструируемых объектов. В то же время получающийся класс содержателен, не всеобъемлющ и потому обладает богатыми свойствами. Дадим теперь точное определение.

Определение 1.1. Топологическое пространство X мы назовем *клеточным комплексом*, если оно представлено в виде объединения непересекающихся множеств σ_i^k , называемых клетками, где k — размерность клетки, i — ее номер, т. е. $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_k} \sigma_i^k$, I_k — множества индексов;

при этом для каждой клетки σ_i^k зафиксировано непрерывное отображение $\chi_i^k: D^k \rightarrow X$ замкнутого k -мерного шара D^k в пространство X , называемое характеристическим и обладающее свойствами: 1) ограничение отображения χ_i^k на открытый шар $\text{Int } D^k$ (замыканием которого является шар D^k) является гомеоморфизмом этого открытого шара на клетку σ_i^k ; 2) граница каждой клетки, т. е. множество $\partial\sigma_i^k = \bar{\sigma}_i^k \setminus \sigma_i^k$ (где через $\bar{\sigma}_i^k$ обозначено замыкание σ_i^k в X) содержится в объединении конечного числа клеток меньших размерностей; 3) множество $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для всех клеток σ_i^k полный прообраз $(\chi_i^k)^{-1}(Y) \subset D^k$ замкнут в шаре D^k .

Мы будем рассматривать в основном конечные клеточные комплексы, т. е. состоящие из конечного числа клеток. Иногда клеточные комплексы называют *CW-комплексами*. Подмножество $Y \subset X$ естественно назвать подкомплексом, если Y замкнут в X , является *CW-комплексом*, причем все его клетки и характеристические отображения являются в то же время клетками и характеристическими отображениями в X . Среди множества различных подкомплексов в X естественно выделяются n -мерные остовы X , которые мы будем обозначать через X^n , т. е. подкомплексы, состоящие из объединения всех клеток размерностей, не превосходящих n . Приведем простейшие примеры клеточных комплексов.

2. Примеры клеточных комплексов

ПРИМЕР 1. Стандартная n -мерная сфера S^n может быть представлена в виде объединения двух клеток: нульмерной и n -мерной: $S^n = \sigma^0 \cup \sigma^n$, причем характеристическое отображение $\xi^n: D^n \rightarrow S^n$ переводит всю

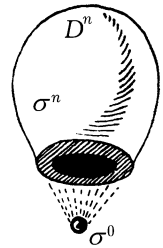


Рис. 1

границу шара в одну точку — в нульмерную клетку (рис. 1). Конечно, представление сферы в виде клеточного комплекса неоднозначно; мы привели простейшее разбиение.

ПРИМЕР 2. Пусть M^2 — двумерное гладкое компактное связное замкнутое (т. е. не имеющее края) многообразие. Тогда, как известно из теоремы классификации двумерных поверхностей (см., например, [2, § 5]), M^2 можно представить в виде склейки фундаментального двумерного многоугольника W по некоторому отождествлению его границы. Например, если M^2 ориентируемо, то W можно условно записать в виде $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ (рис. 2). Чтобы восстановить M^2 , нужно отождествить одинаковые буквы, присутствующие в слове W , учитывая ориентацию на соответствующих сторонах многоугольника. Оказывается, это представление M^2 позволяет рассматривать M^2 как клеточный комплекс, состоящий из одной нульмерной клетки, одной двумерной и $2g$ одномерных, где g — род поверхности, т. е. число ручек (приклейкой которых к сфере и получается ориентируемая поверхность). В самом деле, поскольку по теореме классификации поверхностей все вершины фундаментального многоугольника склеены в одну точку, то ее естественно взять в качестве единственной нульмерной клетки σ^0 . Граница многоугольника W превращается после требуемых отождествлений (см. рис. 2) в набор $2g$ окружностей, склеенных в одной точке, а именно в σ^0 . Двумерная клетка является внутренностью двумерного замкнутого многоугольника W , приклеенного к набору одномерных клеток по характеристическому отображению, заданному в явном виде указанной выше формулой отождествления сторон W . Этот процесс показан на рис. 3 для тора, т. е. при $g = 1$. Поскольку тор гомеоморфен сфере с ручкой, то мы фактически описали процесс приклейки W к набору одномерных клеток для любого g .

Итак, $M^2 = \sigma^0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{2g} \sigma_k^1 \right) \cup \sigma^2$. Аналогичное разбиение имеется и в неориентируемом случае (докажите!), когда $W = c_1^2 c_2^2 \dots c_p^2$, где p — число «пленок Мебиуса», вклейкой которых в сферу и получается произвольное неориентируемое многообразие; тогда

$$M^2 = \sigma^0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^p \sigma_k^1 \right) \cup \sigma^2.$$

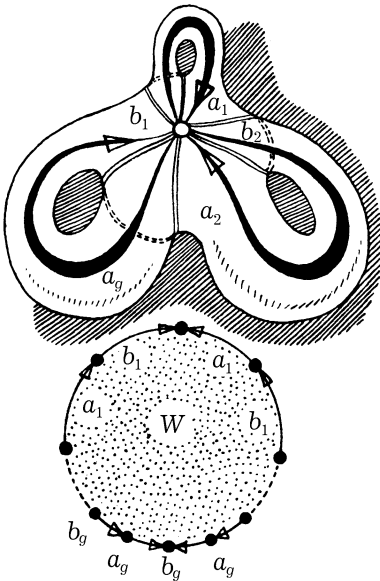


Рис. 2

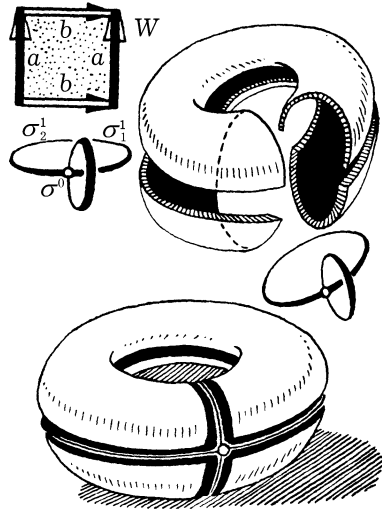


Рис. 3

ПРИМЕР 3. Пусть X — вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n = \{(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}); \lambda \neq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \neq 0\}$, тогда $\mathbb{R}P^n = \sigma^0 \cup \sigma^1 \cup \dots \cup \sigma^n$, где $\sigma^{n-k} = \{(0, \dots, 0, \lambda x_{k+1}, \dots, \lambda x_{n+1})\} = \mathbb{R}P^{n-k} \setminus \mathbb{R}P^{n-k-1}$. Для $\mathbb{R}P^2$ это разбиение условно изображено на рис. 4. Замыкание $\bar{\sigma}^s$ каждой клетки σ^s гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^s$. Аналогичным образом разбивается в объединение клеток комплексное проективное пространство:

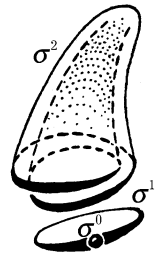


Рис. 4

$$\mathbb{C}P^n = \sigma^0 \cup \sigma^2 \cup \sigma^4 \cup \dots \cup \sigma^{2n}.$$

Хотя мы определили клеточные комплексы конструктивно, не используя какую-либо их конкретную реализацию, однако отметим следующий полезный (хотя и не используемый нами в дальнейшем) факт: любой конечный клеточный комплекс можно вложить в некоторое конечномерное евклидово пространство (докажите!). Это утверждение аналогично соответствующей теореме вложения гладких многообразий

в евклидово пространство и доказывается по аналогичной схеме. В дальнейшем, если не оговорено противное, под термином «комплекс» будем понимать «конечный комплекс».

Мы будем часто иметь дело с непрерывными деформациями топологических пространств и непрерывных отображений. Поэтому напомним важное понятие гомотопии.

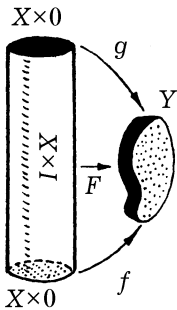


Рис. 5

ПРИМЕР 4. Пусть $f, g: X \rightarrow Y$ — два непрерывных отображения топологических пространств X, Y . Эти отображения называются *гомотопными* (будем писать $f \approx g$), если существует непрерывное отображение $F: X \times I \rightarrow Y$ прямого произведения $X \times I$ (где $I = [0, 1]$ — отрезок) в Y такое, что $F|_{X \times 0} = f$, $F|_{X \times 1} = g$ (рис. 5).

Другими словами, f и g гомотопны, если существует семейство отображений $\varphi_t: X \rightarrow Y$, непрерывных по совокупности переменных $t \in I, x \in X$ таких, что $\varphi_0(x) \equiv f(x)$, $\varphi_1(x) \equiv g(x)$.

Пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными, если существуют отображения $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ такие, что $gf \approx 1_X, fg \approx 1_Y$, где 1_X — тождественное отображение пространства X на себя.

§ 2. Группы сингулярных гомологий

1. Сингулярные симплексы, граничный оператор, группы гомологий

Во многих математических и прикладных задачах часто возникает вопрос: «одинаковы» ли два клеточных комплекса, например являются ли они гомеоморфными или гомотопически эквивалентными. Вопрос этот сложен, однако иногда для ответа на него достаточно вычислить некоторые алгебраические характеристики, естественно связанные с комплексами и сохраняющиеся при гомотопической эквивалентности, т. е. если эти характеристики различны, то комплексы заведомо не являются гомотопически эквивалентными (и тем более гомеоморфными). Совпадение алгебраических характеристик еще не означает, что комплексы «одинаковы». К числу таких характеристик относятся группы

гомологий и когомологий. Сначала мы опишем так называемые сингулярные (ко)гомологии.

Стандартным симплексом Δ^k размерности k называется множество точек $x = (x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, задаваемых так: $x_0 \geq 0, \dots, x_k \geq 0$; $x_0 + x_1 + \dots + x_k = 1$.

Определение 2.1. *Сингулярным симплексом f^k размерности k комплекса X мы будем называть непрерывное отображение стандартного симплекса Δ^k в пространство X . Далее, целочисленной k -мерной сингулярной цепью с комплекса X (или просто цепью) мы будем называть формальную линейную комбинацию сингулярных симплексов f^k комплекса X с целыми коэффициентами, лишь конечное число которых отлично от нуля. Будем использовать обозначение $c = \sum_{(i)} a_i f_i^k$.*

Множество всех k -мерных цепей комплекса X очевидным образом превращается в абелеву группу по сложению. Это свободная абелева группа, которую обозначим $C_k(X)$. Оказывается, эти группы служат хорошим материалом для изготовления тех алгебраических инвариантов, которые позволяли бы иногда различать комплексы между собой. Для построения этих инвариантов следует определить некоторый естественный гомоморфизм, называемый обычно граничным гомоморфизмом (граничным оператором или оператором взятия границы). Он будет действовать так: $\partial_k: C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$. Поскольку все группы $C_k(X)$ свободны, то для определения ∂_k достаточно задать его на каждом сингулярном симплексе f^k , соответствующем одной образующей свободной группы.

Определение 2.2. *Граничным оператором ∂_k называется следующее отображение: $\partial_k(f^k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i f_i^{k-1}$, где $f_i^{k-1} = f^k \Big|_{\Delta_i^{k-1}}$ — ограничение непрерывного отображения f^k на i -ю грань стандартного симплекса Δ^k .*

Напомним, что каждая грань Δ_i^{k-1} k -мерного симплекса сама является $(k-1)$ -мерным симплексом, причем $\Delta_i^{k-1} = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \subset \Delta^k$. Из определения ∂_k следует, что $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$, что означает следующее: $\text{Ker } \partial_k \supset \text{Im } \partial_{k+1}$, где через Ker и Im обозначены ядро и образ гомоморфизма ∂ . Именно это простое обстоятельство и позволяет определить группы гомологий, играющие такую большую роль в геометрии и топологии.

Определение 2.3. Группой сингулярных гомологий $H_k(X)$ размерности k пространства X называется фактор-группа $H_k(X) = \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$. Элементы подгруппы $B_k(X) = \text{Im } \partial_{k+1}$ в группе цепей $C_k(X)$ мы будем называть k -мерными границами, а группу $B_k(X)$ — группой границ в размерности k . Элементы подгруппы $Z_k(X) = \text{Ker } \partial_k$ в группе цепей $C_k(X)$ назовем k -мерными циклами, а группу $Z_k(X)$ — группой циклов в размерности k .

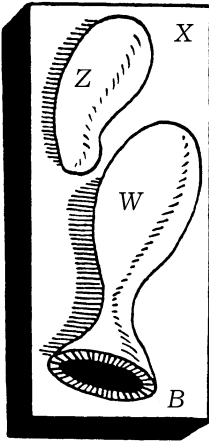


Рис. 6

В этих терминах группу гомологии иногда определяют как фактор-группу группы циклов по подгруппе границ: $H_k = Z_k/B_k$. Определение граничного оператора, цикла и границы формализует интуитивное представление о «замкнутой поверхности» и границе, которые связаны с гладкими компактными многообразиями. В частности, замкнутое компактное гладкое ориентируемое подмногообразие Z в многообразии X можно рассматривать как «цикл», а край B многообразия с краем — как «границу» (рис. 6). Иногда говорят, что цикл z_k гомологичен нулю в X (обозначение: $z_k \sim 0$), если $z_k \in B_k(X)$, т. е. если существует $(k+1)$ -мерная цепь c_{k+1} такая, что $\partial_k c_{k+1} = z_k$. Два цикла z_k и z'_k называются гомологичными в X (обозначение: $z_k \sim z'_k$), если цикл $z_k - z'_k$ гомологичен нулю в X . Полезно представлять себе, какой вид имеют

группы гомологий $H_k(X)$ в том случае, когда они имеют конечное число образующих. Согласно определению, все группы $H_k(X)$ — абелевы. Всякая конечно-порожденная абелева группа допускает следующее представление: $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_N}$, где \mathbb{Z} — свободная абелева группа, а \mathbb{Z}_{p_i} — конечные циклические группы; число p_i обозначает порядок группы. Количество бесконечных слагаемых в разложении группы $H_k(X)$ (для абелевых групп это число определено однозначно) называется k -мерным числом Бетти, или рангом группы $H_k(X)$. Если конечных циклических групп в разложении $H_k(X)$ нет (т. е. $H_k(X)$ — свободная абелева группа), то говорят, что группа $H_k(X)$ не имеет кручения. Например, если пространство X состоит из одной точки x , то легко подсчитать, что $H_0(x) = \mathbb{Z}$, $H_k(x) = 0$ при $k \neq 0$. В самом деле, в каждой размерности k имеется только один сингулярный симплекс $f^k: \Delta^k \rightarrow x$,

т. е. $C_k(x) = \mathbb{Z}$, и, следовательно, $\partial f^k = \left(\sum_i (-1)^i\right) f^{k-1}$, т. е. $\partial f^k = 0$ при $k = 0$ и k нечетном: $\partial f^k = \partial f^{k-1}$ при четном k . Итак, $Z_k = B_k$: при нечетном k и $Z_k = B_k = 0$ при четном k , что и завершает подсчет H_k .

Для любого пространства X имеем, согласно определению, $H_k(X) = 0$ при $k < 0$. Если X — линейно связное пространство, то $H_0(X) = \mathbb{Z}$ (проверьте!). Если же пространство X не является линейно связным, то $H_0(X) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$, где I — множество компонент линейной связности пространства X .

2. Цепные комплексы, цепная гомотопия, гомотопическая инвариантность групп гомологий

Совокупность групп $\{C_k(X)\}$ и связывающих их гомоморфизмов $\{\partial_k\}$ естественно организуется в следующую последовательность:

$$\dots \rightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

где $\partial_k \circ \partial_{k+1} \equiv 0$ и гомоморфизм ε — эпиморфизм (см. ниже). Эта последовательность иногда называется цепным комплексом, а группы $\text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$ называются k -мерными группами гомологий цепного комплекса. Гомоморфизм ε определяется так: $\varepsilon(\sum_i a_i f_i^0) = \sum_i a_i \in \mathbb{Z}$.

Если X — линейно связное пространство, то $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$. Цепные комплексы удобны при исследовании свойств групп гомологий. Пусть даны два пространства X, Y и непрерывное отображение $g: X \rightarrow Y$. Из определений 2.1, 2.2 следует, что это отображение индуцирует совокупность отображений $g_k: C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$, являющихся гомоморфизмами соответствующих групп. Удобно изобразить эту систему гомоморфизмов в виде таблицы (диаграммы), где $e: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ — тождественное отображение.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & \downarrow e \\ \dots & \xrightarrow{\partial'_2} & C_1(Y) & \xrightarrow{\partial'_1} & C_0(Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Важным ее свойством является то, что для всех k выполнены соотношения: $g_{k-1} \partial_k = \partial'_k g_k$, $e \varepsilon = \varepsilon' g_0$ (что следует из определения граничного оператора), т. е. диаграмма коммутативна. В этом случае отображение $\alpha = \{g_k\}: C \rightarrow C'$ цепных комплексов $C = \{C_k(X)\}$

и $C' = \{C_k(Y)\}$ назовем цепным отображением. Отсюда следует, что гомоморфизмы g_k индуцируют гомоморфизмы $g_{k*}: \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1} \rightarrow \text{Ker } \partial'_k / \text{Im } \partial'_{k+1}$, т. е. гомоморфизмы групп гомологий $g_{k*}: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$.

Лемма 2.1. *Гомоморфизмы $g_* = \{g_{k*}\}$ обладают свойствами: 1) если $g: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow Z$ — непрерывные отображения, то $(h \circ g)_* = h_* \circ g_*$; 2) если $1_X: X \rightarrow X$ — тождественное отображение X на себя, то $(1_X)_*: H_k(X) \rightarrow H_k(X)$ — тождественное отображение для любого k .*

Доказательство следует из определения соответствующих гомоморфизмов.

Следствие 2.1. *Группы сингулярных гомологий топологически инвариантны, т. е. если два пространства X и Y гомеоморфны, то их группы сингулярных гомологий изоморфны.*

Доказательство.

Если $g: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, то $g^{-1}: Y \rightarrow X$ также гомеоморфизм; осталось применить лемму 2.1.

Оказывается, имеет место более сильное утверждение: группы гомологий гомотопически эквивалентных пространств изоморфны (гомотопическая инвариантность гомологий). Для доказательства нам требуется понятие «цепной гомотопии» цепных комплексов. Пусть C и C' — цепные комплексы и $\varphi = \{\varphi_k: C \rightarrow C'\}$, $\psi = \{\psi_k: C \rightarrow C'\}$ — два цепных отображения $C \rightarrow C'$. ■

Определение 2.4. Будем говорить, что задана *цепная гомотопия* D комплекса C в комплекс C' , если задана совокупность $D = \{D_k\}$ гомоморфизмов $D_k: C_k \rightarrow C'_{k+1}$, таких, что для каждого k выполнено соотношение $D_{k-1} \circ \partial_k + \partial'_{k+1} \circ D_k = \varphi_k - \psi_k$. Получаем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & \swarrow D_k & \downarrow \varphi_k - \psi_k & \searrow D_{k-1} & & & \\
 \dots & \longrightarrow & C'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & C'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & C'_{k-1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Естественно назвать два цепных отображения φ и ψ , связанные цепной гомотопией, гомотопными (или цепно-гомотопными). Из опре-

деления групп гомологий следует, что гомотопные цепные отображения индуцируют одинаковые отображения для групп гомологий. В самом деле, если $z \in C_k$ является циклом, т.е. $\partial_k z = 0$, то из определения цепной гомотопии получаем

$$\varphi_k(z) - \psi_k(z) = D_{k-1}\partial_k(z) + \partial'_{k+1}D_k(z) = \partial'_{k+1}(D_k(z)),$$

т.е. образы этого цикла при отображениях φ_k и ψ_k отличаются лишь на цепь-границу, что и требовалось.

Теорема 2.1. Пусть $f, g: X \rightarrow Y$ — гомотопные друг другу непрерывные отображения пространств X и Y . Тогда индуцированные гомоморфизмы $f_*, g_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ совпадают для всех k . В частности, гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий.

Доказательство.

Поскольку f и g гомотопны, то существует непрерывное отображение цилиндра $F: X \times I \rightarrow Y$, $I = [0, 1]$ такое, что $F|_{X \times 0} = f$, $F|_{X \times 1} = g$. Рассмотрим над каждым k -мерным симплексом Δ^k $(k+1)$ -мерный цилиндр $\Delta^k \times I$ (прямое произведение симплекса на отрезок) и разобьем его в объединение $k+1$ -мерных симплексов в количестве $k+1$: $\Delta^k \times I = \bigcup_{i=0}^k \Delta_i^{k+1}$. Симплекс Δ_i^{k+1} задается в пространстве переменных (x_0, \dots, x_k, t) так: $\Delta_i^{k+1} = \{(x_0, \dots, x_k, t): x_0 + \dots + x_{i-1} \leq t \leq x_0 + \dots + x_i\}$. На рис. 7, 8 изображено соответствующее разбиение цилиндров $\Delta^1 \times I$ и $\Delta^2 \times I$ (т.е. при $k=1, 2$). Пусть $\psi: \Delta^k \rightarrow X$ — произвольный сингулярный симплекс пространства X . Определим отображение $\varphi \times 1_I: \Delta^k \times I \rightarrow X \times I$ цилиндра $\Delta^k \times I$ в $X \times I$. Поскольку на $X \times I$ определено отображение F , то имеет смысл композиция $F(\varphi \times 1_I): \Delta^k \times I \rightarrow Y$. Ограничения этого отображения на $(k+1)$ -мерные симплексы Δ_i^{k+1} определяют $k+1$ сингулярных симплексов пространства Y . Сумму этих симплексов обозначим через $D_k(\varphi)$. Мы сопоставили каждому симплексу φ симплекс $D_k(\varphi)$, что определяет гомоморфизм $D_k: C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$. Остается заметить, что совокупность гомоморфизмов $\{D_k\}$ определяет цепную гомотопию, связывающую два цепных отображения $\varphi = \{f_k\}$ и $\psi = \{g_k\}$, индуцированных отображениями f и g . В самом деле, с геометрической точки зрения соотношение $\partial'_{k+1}D_k = -D_{k-1}\partial_k + f_k - g_k$ означает

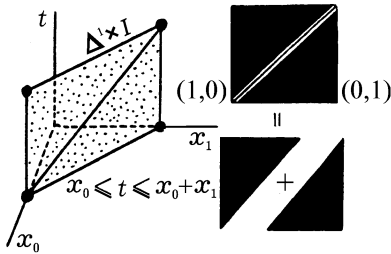


Рис. 7

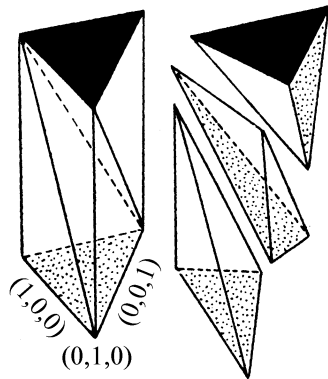


Рис. 8

только то, что полная граница сингулярной «призмы» $\Delta^k \times I$ складывается из трех компонент: боковой границы $-D_{k-1}\partial_k$ и двух «оснований»: f_k и $-g_k$ (см. рис. 8). Таким образом, гомотопные отображения f и g индуцируют цепногомотопные отображения $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ и, следовательно, одинаковые отображения групп гомологий. Если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существуют отображения $p: X \rightarrow Y$, $h: Y \rightarrow X$ такие, что $ph \sim 1_Y$ и $hp \sim 1_X$, откуда (и из леммы 2.1) получаем второе утверждение теоремы. ■

Именно гомотопическая инвариантность групп гомологий объясняет ту значительную роль, которую они играют в геометрии и топологии. В частности, эти группы выступают в качестве инвариантов пространств (относительно гомотопической эквивалентности). Если группы гомологий двух пространств различны, то эти пространства не могут быть гомотопически эквивалентными.

Группы сингулярных гомологий плохо поддаются вычислению, поэтому в дальнейшем мы будем иногда пользоваться клеточными гомологиями, вычисление которых значительно проще. Для конечных клеточных комплексов группы сингулярных гомологий и клеточных изоморфны. Определение и свойства клеточных гомологий см., например, в [3, 4].

ГЛАВА 2

Критические точки гладких функций на многообразиях

§ 3. Критические точки и геометрия поверхностей уровня

1. Определение критических точек

В первой части курса дифференциальной геометрии и топологии [2] доказана теорема классификации двумерных связных замкнутых многообразий. При этом обнаружилось, что они сводятся к двум бесконечным сериям: сферы с ручками и сферы с пленками Мёбиуса (см. [2, гл. 4, § 5]). Интересным вопросом является классификация трехмерных замкнутых многообразий. В отличие от двумерного случая аналогичная классификация пока отсутствует. Тем не менее множество всех трехмерных многообразий допускает довольно простое и полезное во многих приложениях описание. Оказывается, можно предъявить те «элементарные кирпичи», из которых конструируется (склеивается) любое такое многообразие. В дальнейшем мы докажем эту теорему, но для этого нам потребуется развить некоторый геометрический аппарат, важный и сам по себе, поскольку он имеет приложения, далеко выходящие за рамки вопроса описания трехмерных многообразий. Поэтому мы сосредоточим сейчас основное внимание на изучении связи между геометрией многообразий и свойствами гладких функций, заданных на этих многообразиях. Пусть f — гладкая вещественнозначная функция на гладком многообразии M размерности n . Рассмотрим ковекторное поле $\text{grad } f$.

Определение 3.1. Точка $x_0 \in M$ называется *критической*, или *стационарной* для функции f , если $\text{grad } f(x_0) = 0$. Значение $f(x_0)$ называется критическим значением функции f .

В критической точке x_0 определена матрица вторых частных производных f , т. е. матрица гессиана f , а именно $d^2f = \left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) = (f_{x_i x_j})$.

Определение 3.2. Критическая точка x_0 для функции f называется невырожденной, если матрица d^2f невырождена в точке x_0 .

Это определение не зависит от выбора локальной системы координат. В самом деле, если нам задана регулярная замена координат $x_i = x_i(y_1, \dots, y_n)$, $1 \leq i \leq n$, то матрица d^2f преобразуется так: $f_{x_i x_j}(x_0) = \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} f_{y_p y_q}(x_0)$, поскольку $f_{x_i}(x_0) = 0$ (точка x_0 — критическая). Из невырожденности $(f_{x_i x_j})$ следует невырожденность $(f_{y_i y_j})$. Матрица d^2f , очевидно, симметрична и, следовательно, определяет симметричную билинейную форму на касательной плоскости $T_{x_0}M$ к многообразию M в точке x_0 . Эту форму обозначим тем же символом d^2f .

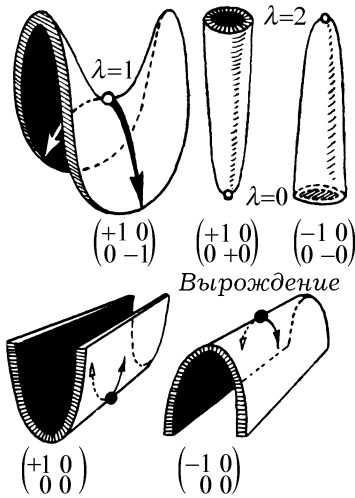


Рис. 9

Определение 3.3. Индексом $\text{ind}_f x_0$ критической точки x_0 называется мак-

симальная размерность линейного подпространства в плоскости $T_{x_0}M$, на котором форма d^2f отрицательно определена. Степенью вырождения критической точки x_0 называется размерность нулевого подпространства в $T_{x_0}M$, т. е. состоящего из всех таких векторов a , для которых $d^2f(a, b) = 0$ для любого вектора $b \in T_{x_0}M$.

Другими словами, степень вырождения совпадает с числом нулевых собственных чисел формы d^2f , а индекс — это число отрицательных собственных чисел. Ясно, что точка x_0 является невырожденной в том и только в том случае, когда степень вырождения равна нулю (рис. 9). В основном все дальнейшие события будут развиваться вокруг невырожденных критических точек.

Определение 3.4. Гладкая функция f на M называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены.

В [1, с. 488] доказано

Предложение 3.1. *На любом гладком компактном многообразии существуют функции Морса. Функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии. Каждая функция Морса имеет на компактном многообразии лишь конечное число критических точек, в частности все они изолированы. В множестве всех функций Морса существует всюду плотное подмножество, состоящее из таких функций f , что каждому критическому значению такой функции отвечает одна и только одна критическая точка на многообразии (значения функции в разных критических точках различны).*

2. Каноническое представление функции в окрестности невырожденной критической точки

В этом пункте мы докажем техническую, но чрезвычайно полезную теорему, позволяющую изучать поведение функции в окрестности невырожденной критической точки.

Предложение 3.2. *Пусть f — гладкая функция на M и x_0 — невырожденная критическая точка. Тогда в некоторой открытой окрестности точки x_0 существуют такие локальные регулярные координаты y_1, \dots, y_n , что в этих координатах функция f запишется в виде $f(y) = -y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_n^2$, где λ — индекс критической точки.*

Замечание. Содержательность этого утверждения заключается в том, что, в отличие от разложения функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 , в записи функции f , утверждаемой теоремой, нет членов порядков, превосходящих два. Оказывается, все эти члены высоких порядков можно убрать подходящей заменой координат.

Доказательство.

Поскольку нас интересует малая окрестность точки x_0 , то можно сразу считать, что функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ задана в диске (шаре) $D_\varepsilon(O)$ радиуса ε , $f(O) = 0$, где O — критическая точка функции f . Тогда мы утверждаем, что существуют гладкие функции g_1, \dots, g_n

такие, что $f(x) = x_1 g_1 + \dots + x_n g_n$ и $\dot{g}_i(O) = \frac{\partial f(O)}{\partial x_i}$. В самом деле, имеет место следующее очевидное равенство $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt =$

$= f(1 \cdot x) - f(O) \cdot x = f(x)$. Отсюда, делая замену параметра, получаем

$$f(x) = \sum_i \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} x_i dt = \sum_i x_i \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt = \sum_i x_i g_i(x),$$

где $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$. Очевидно, что $g_i(O) = 0$, так как $\text{grad } f(O) = 0$.

Применяя затем это утверждение к функциям g_i , получаем, что существуют гладкие функции h_{ij} такие, что $g_i = \sum_j x_j h_{ij}$. Таким образом, мы представили функцию f в виде $f = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}$, где можно считать, что $h_{ij} = h_{ji}$. Далее, мы утверждаем, что $h(O) = (h_{ij}(O)) = (f_{x_i x_j}(O))$. Это вытекает из того, что

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt = \sum_j x_j \int_0^1 \frac{\partial g_i(tx)}{\partial x_j} dt = \\ &= \sum_j x_j \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^1 \frac{\partial f(t\tau x)}{\partial x_i} d\tau \right) dt = \\ &= \sum_j x_j \int_0^1 \int_0^1 d\tau dt \frac{\partial^2 f(t\tau x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_j x_j h_{ij}. \end{aligned}$$

Отсюда $h_{ij}(O) = f_{x_i x_j}(O)$. Далее будем двигаться по индукции. Предположим, что нам удалось найти координаты y_1, \dots, y_n , в которых функция f имеет вид

$$f(y) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{k-1}^2 + \sum_{i,j \geq k} y_i y_j P_{ij},$$

где функции $P_{ij}(y)$ образуют симметричную и невырожденную в точке O матрицу. Начало индукции (при $k = 1$) у нас уже имеется, так как при $k = 1$ достаточно взять в качестве матрицы (P_{ij}) матрицу (h_{ij}) .

Итак, переходим к следующему шагу индукции. Перепишем функцию f в таком виде:

$$f = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{k-1}^2 + P_{kk}y_k^2 + \sum_{i,j \geq k} y_i y_j P_{ij},$$

где $(i, j) \neq (k, k)$. Квадратная матрица (P_{ij}) размера $(n \times n)$ показана на рис. 10. Так как эта матрица симметрична и невырождена, то существует линейная замена координат y_k, \dots, y_n такая, что в одной точке (а именно в начале координат) матрица приведется к диагональному виду.

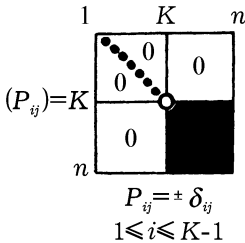


Рис. 10

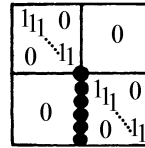


Рис. 11

Можно сразу считать, что координаты y_k, \dots, y_n были выбраны именно таким образом, тогда отсюда следует, что $P_{kk}(O) \neq 0$. Рассмотрим функцию $q(y) = \sqrt{|P_{kk}(y)|}$ и сделаем замену переменных $(y) \rightarrow (z)$ по формулам:

$$\begin{cases} z_i = y_i \text{ при } 1 \leq i \leq k-1; k+1 \leq i \leq n; \\ z_k = q(y) \cdot \left(y_k + \sum_{i>k} y_i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right). \end{cases}$$

Найдем якобиан этой замены в точке O (рис. 11). Ясно, что

$$\left. \frac{\partial z_k}{\partial y_k} \right|_O = q(O) = \sqrt{|P_{kk}(O)|}, \text{ т. е. } \det \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial z_k}{\partial y_k} \neq 0.$$

По теореме о неявных функциях функции z_1, \dots, z_n могут быть взяты в качестве локальных регулярных координат в некоторой достаточно

малой окрестности точки O . Итак, получаем

$$\begin{aligned} f(z) = & \sum_{i \leq k-1} \pm z_i^2 + P_{kk} \frac{z_k^2}{q^2} - 2P_{kk} \frac{z_k}{q} \sum_{i > k} y_i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} + \\ & + P_{kk} \left(\sum_{i > k} y_i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right)^2 + 2 \left(\frac{z_k}{q} - \sum_{i > k} y_i \frac{P_{ik}}{P_{kk}} \right) \sum_{i > k} y_i P_{ik} + \\ & + \sum_{i, k > k+1} y_i y_j P_{ij} = \pm z_1^2 \pm \dots \pm z_k^2 + \sum_{i, j \geq k+1} z_i z_j \tilde{P}_{ij}. \end{aligned}$$

Мы завершили следующий шаг индукции, что и доказывает теорему. ■

Таким образом, всегда можно выбрать такие координаты, что функция запишется в виде квадратичной функции, приведенной к диагональному виду в целой окрестности (а не только в самой невырожденной критической точке).

3. Топологическая структура поверхностей уровня функции в окрестности критических точек

Пусть f — гладкая функция на M . Введем обозначения: $f_a = f^{-1}(a)$ — поверхность уровня функции f , отвечающая значению a , $f_a = \{x \in M, f(x) = a\}$; $M_a = \{x \in M, f(x) \leq a\}$, т.е. M_a состоит из всех точек M , в которых значения f не превосходят a . Границей (краем) M_a является f_a . В том случае, когда a — регулярное (т.е. не критическое) значение функции f , то в силу теоремы о неявных функциях поверхность f_a является гладким подмногообразием в M размерности $n - 1$, а M_a является гладким n -мерным многообразием с краем f_a (рис. 12).

Лемма 3.1. Пусть f — гладкая функция на компактном замкнутом многообразии M , и пусть отрезок $[a, b]$ (где $a < b$) не содержит критических значений функции f , т.е. в множестве $f^{-1}(a, b)$, лежащем в многообразии M , нет критических точек функции f . Тогда многообразия f_a и f_b диффеоморфны и, кроме того, диффеоморфны многообразия M_a и M_b (два последних многообразия имеют края).

Доказательство.

Поскольку M компактно, то существует достаточно малое число $\varepsilon > 0$ такое, что отрезок $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ также не содержит критических значений функции f . Как известно из курса геометрии и топологии,

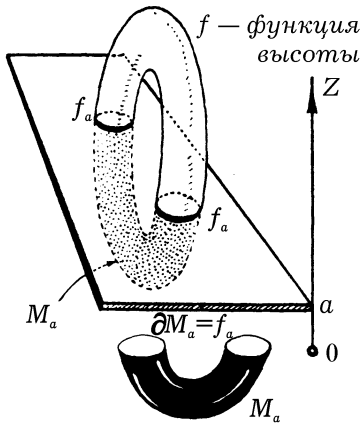


Рис. 12

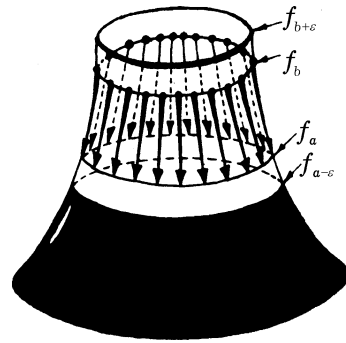


Рис. 13

любое компактное многообразие можно вложить в конечномерное евклидово пространство, а потому на M можно задать некоторую риманову метрику (например, индуцированную евклидовой). Фиксируем эту положительно определенную метрику и рассмотрим на M векторное поле $v(x) = -\text{grad } f(x)$. На многообразии $f^{-1}[a - \epsilon, b + \epsilon]$ это поле не имеет особенностей (нулей) и поле v ортогонально к гиперповерхностям уровня $f^{-1}(t)$, $a \leq t \leq b$. Рассмотрим интегральные траектории поля v , начинающиеся на подмногообразии f_b и кончающиеся на f_a (рис. 13). В силу компактности M можно определить гладкую деформацию поверхности f_b вдоль этих траекторий на поверхность f_a . Отсюда следует диффеоморфность f_a и f_b , так как обратная деформация строится очевидным образом. Точно так же проверяется диффеоморфность M_a и M_b , так как полный прообраз $f^{-1}[a, b]$ диффеоморфен $f_a \times I$, где I — отрезок. Для того чтобы продолжить этот диффеоморфизм, заданный пока что в слое $a \leq f \leq b$, достаточно отступить на ϵ «вниз» от поверхности f_a и затормозить движение точек вдоль интегральных траекторий на интервале от f_a до $f_{a-\epsilon}$. Слой f_b , опускаясь вниз, будет постепенно замедлять свое скольжение, и, наконец, в момент $a - \epsilon$ он останавливается. Это торможение можно осуществить с помощью гладкой замены времени, задаваемой гладким графиком, показанным на рис. 14. Лемма доказана. ■

Изучим структуру поверхностей уровня около критических точек

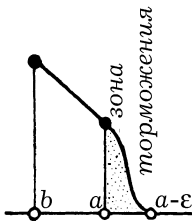


Рис. 14

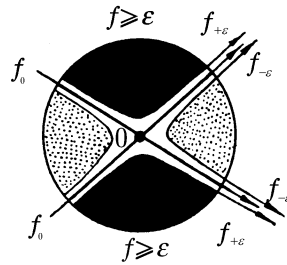


Рис. 15

функции f . Пусть x_0 — невырожденная критическая точка, $f(x_0) = 0$. В силу предложения 3.2 в достаточно малой окрестности U точки x_0 можно ввести криволинейные координаты x_1, \dots, x_n такие, что $f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$. Будем считать, что центр O окрестности U совмещен с x_0 и $f(O) = 0$. Рассмотрим три гиперповерхности: $f_{-\varepsilon}, f_0, f_{+\varepsilon}$ где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Поверхности задаются квадратичными уравнениями в координатах области U : $-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 = \{-\varepsilon, 0, +\varepsilon\}$. Здесь λ — индекс критической точки. Поверхность f_0 является конусом с вершиной в O , а поверхности $f_{\pm\varepsilon}$ — гиперboloидами. На рис. 15 показан случай $n = 2, \lambda = 1$, на рис. 16 — случай $n = 3, \lambda = 1$.

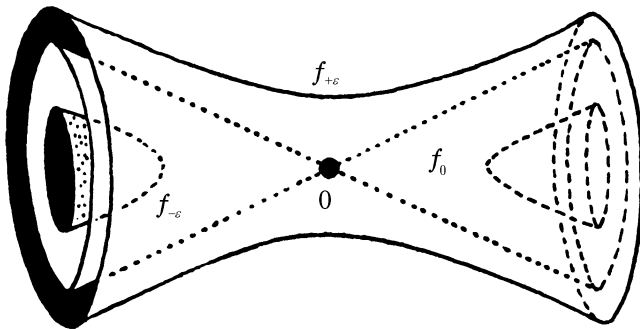


Рис. 16

Лемма 3.2. Пусть в слое $f^{-1}[-\varepsilon, +\varepsilon] = M_{+\varepsilon} \setminus M_{-\varepsilon}$ имеется только одна критическая точка индекса λ . Тогда многообразию $M_{+\varepsilon}$, гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу, получающемуся

из $M_{-\varepsilon}$ путем приклейки к $M_{-\varepsilon}$ одной клетки σ^λ размерности λ к границе $f_{-\varepsilon} = \partial M_{-\varepsilon}$.

Иногда говорят, что $M_{+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса $M_{-\varepsilon} \cup \sigma^\lambda$.

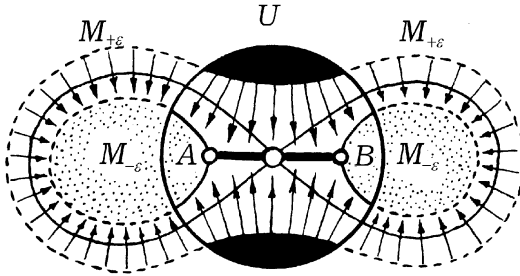


Рис. 17

Доказательство.

Мы построим непрерывную деформацию $\varphi_t: M_{+\varepsilon} \rightarrow M_{+\varepsilon}$, где $\varphi_0 = 1_{M_{+\varepsilon}}$ и $\varphi_1: M_{+\varepsilon} \rightarrow M_{-\varepsilon} \cup \sigma^\lambda$, такую, что деформация φ_t тождественна на $M_{-\varepsilon}$. Из определения гомотопически эквивалентных пространств (см. § 1) следует, что существование такой деформации доказывает лемму. Действуя по индукции по значениям функции f , начнем с критических точек индекса $\lambda = 0$ (точки минимумов). Для точек минимума утверждение леммы очевидно. Снова построим векторное поле $v = -\text{grad } f$ и построим деформацию, связанную с интегральными траекториями этого поля. Вне окрестности U заставим точки слоя $M_{+\varepsilon} \setminus M_{-\varepsilon}$ скользить вдоль траектории поля v (рис. 17). В окрестности U деформация устроена по-иному и также показана на рис. 17. Отрезок AB условно изображает диск $D^\lambda(x_1, \dots, x_\lambda)$, граница которого (т.е. сфера $S^{\lambda-1}$) гладко вложена в край области $M_{-\varepsilon}$. На рис. 17 граница диска D^λ изображена в виде пары точек A и B . Результат деформации показан на рис. 18. Лемма доказана. ■

4. Представление многообразия в виде клеточного комплекса, связанное с функцией Морса

Оказывается, задание на M функции Морса определяет естественное представление M в виде клеточного комплекса. Разные функции Морса определяют, вообще говоря, различные такие представления.

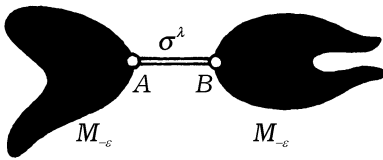


Рис. 18

Теорема 3.1. Пусть f — функция Морса на гладком компактном связном замкнутом многообразии M . Тогда M гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу, в котором каждой критической точке индекса λ соответствует одна клетка размерности λ .

Другими словами, в этом клеточном комплексе столько клеток, сколько имеется критических точек у функции, причем размерность каждой клетки равна индексу соответствующей ей критической точки. Так как на любом компактном гладком связном многообразии есть функция Морса (см. предложение 3.1), то любое такое многообразие допускает описанное в теореме 3.1 представление.

Доказательство.

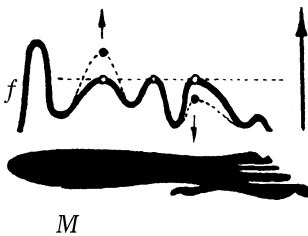


Рис. 19

Поскольку M компактно, то число критических точек функции f конечно. Если на каждом критическом уровне функции находится только одна критическая точка, то утверждение сразу следует из леммы 3.2. Если же на одном критическом уровне находится несколько критических точек, то, как видно из доказательства леммы 3.2, вследствие изолированности этих точек, можно считать, что к многообразию

$M_{-\varepsilon}$ одновременно приклеивается несколько клеток. Другой способ: можно рассмотреть малое возмущение функции в окрестности критических точек, находящихся на одном критическом уровне [1, с. 490]. Из предложения 3.1 можно установить (см. доказательство в § 6), что это возмущение переведет f в новую функцию f с таким же числом критических точек тех же индексов, но расположенных уже на разных критических уровнях (рис. 19). Теорема доказана.

Важно представлять себе, что теорема 3.1 позволяет восстановить гомотопический тип многообразия по функции далеко не однозначно. Мы можем вычислить, в общем случае, лишь число клеток и их размерности, но, вообще говоря, ничего не можем сказать о способе приклейки этих клеток друг к другу, что и показывает нам тот произвол, с которым реконструируется клеточная структура многообразия.

5. Операция приклейки ручек и разложение компактного многообразия в сумму ручек

Рассмотрим более подробно операцию приклейки клетки σ^λ к границе многообразия $M_{-\varepsilon}$. Как мы видели, именно эта операция меняет гомотопический тип многообразия $M_{-\varepsilon}$ после «перехода» через критический уровень. В предыдущем пункте мы намеренно огрубил изучение процесса перестройки поверхности уровня, чтобы сразу выявить «гомотопическую часть» этой перестройки. Теперь изучим изменение многообразия $M_{-\varepsilon}$ с более тонкой дифференциальной точки зрения. Для этого нам потребуется ввести операцию «приклейки ручек».

Определение 3.5. Ручкой размерности n и индекса λ называется прямое произведение двух дисков $H_\lambda^n = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$. Диск D^λ размерности λ иногда называют осью ручки.

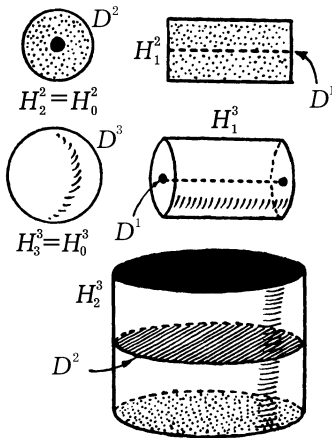


Рис. 20

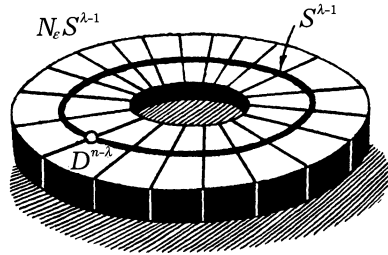


Рис. 21

Ручка H_λ^n является гладким многообразием с краем

$$\begin{aligned} \partial H_\lambda^n &= \partial(D^\lambda \times D^{n-\lambda}) = (\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times \partial D^{n-\lambda}) = \\ &= (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) \cup (D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}) \end{aligned}$$

(рис. 20). Пусть $K^p \subset V^q$ — гладко вложенное компактное подмногообразие в римановом многообразии V^q . В каждой точке $x \in K$ рассмотрим нормальный диск радиуса ε с центром в точке x (состоящий из

отрезков длины ε , ортогональных в V и K). Объединение всех таких дисков назовем трубчатой окрестностью $N_\varepsilon K$. Тогда существует такое

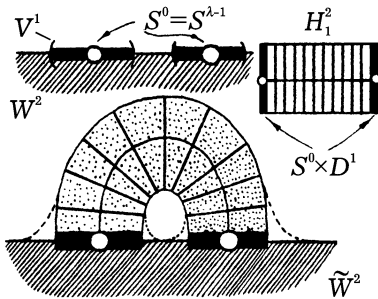


Рис. 22

достаточно малое $\varepsilon > 0$, что трубчатая окрестность $N_\varepsilon K$ является гладким q -мерным подмногообразием в V^q с краем $\partial N_\varepsilon K$, являющимся гладким $(q-1)$ -мерным подмногообразием многообразия V^q . В частности, $\partial N_\varepsilon K$ расслаивается на сферы S^{q-p-1} радиуса ε , центры которых расположены на K^p [1, с. 498]. Определим операцию приклейки ручки H_λ^n к многообразию W^n с краем $V^{n-1} = \partial W^n$. Пусть $S^{\lambda-1} \subset \subset V^{n-1}$ — гладко вложенная сфера

такая, что ее достаточно малая трубчатая окрестность $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ радиуса $\varepsilon > 0$ представляется в виде прямого произведения $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, где $D^{n-\lambda}$ нормальный диск размерности $n-\lambda$ радиуса ε (рис. 21). Если в границе V^{n-1} многообразия W^n лежит такая сфера $S^{\lambda-1}$, то можно построить новое гладкое многообразие \tilde{W}^n , с краем $\tilde{V}^{n-1} = \partial W^n$, рассмотрев склейку многообразия W^n с ручкой H_λ^n по отображению $g: S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow N_\varepsilon S^{\lambda-1} \cong S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$, являющемуся диффеоморфизмом между трубчатой окрестностью $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$ и частью границы $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \subset \partial H_\lambda^n$. Эта операция показана на рис. 22 для ручки H_1^2 , на рис. 23 для ручки H_1^3 и на рис. 24 для ручки H_2^3 . Сглаживая затем «углы», возникшие в точках $x \in \partial N_\varepsilon S^{\lambda-1} = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$, мы и получаем новое гладкое многообразие \tilde{W}^n с гладким краем \tilde{V}^{n-1} . На рис. 22, например, эта операция «сглаживания углов» показана пунктиром.

Оказывается, эта довольно простая операция приклейки ручек является той элементарной процедурой, итерирование которой позволяет построить любое компактное многообразие, начиная с конечного набора точек. При этом «элементарные кирпичики» — это ручки.

Теорема 3.2. Любое гладкое компактное связное замкнутое многообразие M^n диффеоморфно объединению некоторого конечного числа ручек $\{H_\lambda^n\}$ соответствующих критическим точкам функции Морса на M^n . При этом каждой критической точке индекса λ отвечает в точности одна ручка H_λ^n .

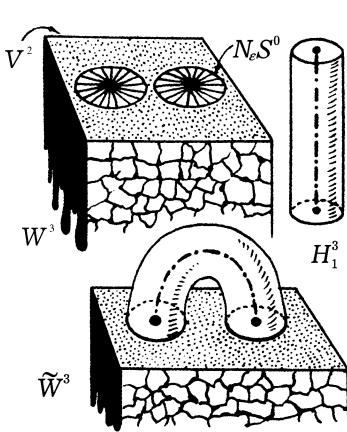


Рис. 23

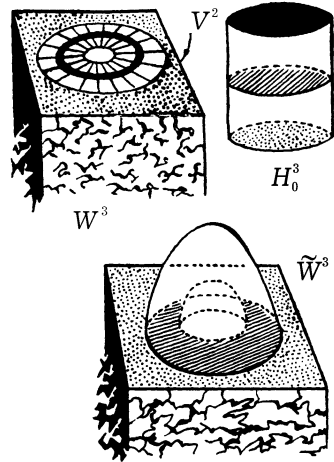


Рис. 24

Доказательство.

Рассмотрим на M произвольную функцию Морса, на каждом критическом уровне которой находится ровно одна критическая точка (см. предложение 3.1). Так как в силу леммы 3.1 M_a диффеоморфно M_b при $a < b$ и при условии, что на отрезке $[a, b]$ нет критических значений функции, то достаточно изучить изменение $M_{-\epsilon}$ при переходе через критическую точку индекса λ . Для этого мы воспользуемся уже построенной выше операцией стягивания многообразия $M_{+\epsilon}$ вдоль интегральных траекторий поля v (см. доказательство теоремы 3.1), но, в отличие от п. 4, выполним это стягивание не до конца, остановившись незадолго перед завершением этой операции. Геометрическая процедура показана на рис. 25. Результат деформации показан на рис. 26. Поскольку деформация является диффеоморфизмом, то $M_{+\epsilon} = M_{-\epsilon} \cup H_\lambda^n$, что и требовалось. ■

Отметим что «осью ручки» H_λ^n является λ -мерный диск D^λ , состоящий из интегральных траекторий поля $v = -\text{grad } f$, выходящих из особой точки x_0 поля v (критической точки). В некотором смысле справедливо и обратное утверждение, а именно: если, напротив, задано некоторое разложение компактного многообразия M в сумму ручек, то можно восстановить некоторую функцию Морса f на M такую, что

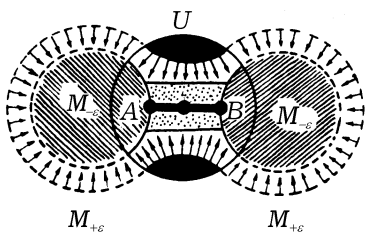


Рис. 25

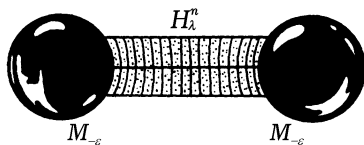


Рис. 26

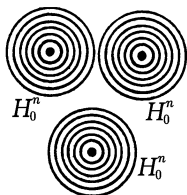


Рис. 27

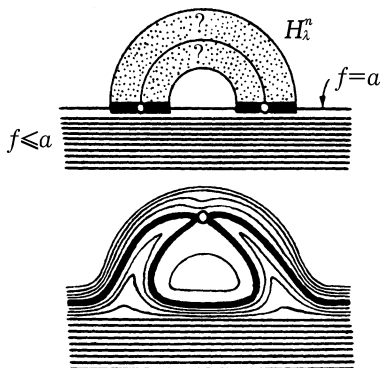


Рис. 28

ассоциированное с ней разложение M в сумму ручек совпадает с заданным исходным разбиением M в объединение ручек. Доказательство проводится индукцией по числу ручек и по их индексу. В самом деле, ручки $\{H_0^n\}$ можно отождествить с дисками $\{D^n\}$, центры которых можно по определению считать точками минимума конструируемой функции f (т.е. точками индекса 0) (рис. 27). Искомую функцию будем строить, предъявляя ее гладкие поверхности уровня в M (при этом, конечно, функция f будет определена неоднозначно). Итак, в качестве гиперповерхностей f_a в дисках $D^n = H_0^n$ возьмем концентрические сферы с центрами в локальных минимумах функции f . Предположим теперь, что искомая функция построена на гладком многообразии, задаваемом неравенством $f \leq a$ с краем $V^{n-1} = \{f = a\}$, и пусть следующая по счету ручка H_{λ}^n приклеена к краю V^{n-1} . Требуется продолжить функцию на эту ручку. Продолжение показано на рис. 28 путем предъ-

явления гиперповерхностей уровня. При этом потребовалось немного изменить прежнюю функцию в окрестности края V^{n-1} , и образовавшиеся «выбросы» поверхностей уровня продолжить внутрь ручки. При этом в ручке появилась одна критическая точка индекса λ , что и завершает доказательство, поскольку полученная при этом функция снова оказалась постоянной на крае нового многообразия, а это позволяет продолжить процесс на следующие ручки.

§ 4. Точки бифуркации и их связь с гомологиями

1. Определение точек бифуркации

То обстоятельство, что задание функции Морса на M позволяет представить M в виде клеточного комплекса, клетки которого соответствуют критическим точкам функции, указывает на возможное существование связи между числом и индексами критических точек и гомологическими характеристиками многообразия, поскольку последние определяются разбиением M в объединение клеток. Такая связь действительно существует, причем она имеется не только для гладких функций на многообразиях, но и для непрерывных функций на произвольном клеточном комплексе. В этом пункте мы будем рассматривать непрерывные функции на конечном клеточном комплексе X . Будем также считать (для простоты), что X является метрическим пространством.

Определение 4.1. Точка $x \in X$ называется *правильной* для функции f на X , если существует открытая окрестность U этой точки такая, что U гомеоморфна произведению $f^{-1}(a) \times I$ (где I — единичный отрезок, $a = f(x)$), причем следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & f^{-1}(a) \times I & \xrightarrow{p} & f^{-1}(a) \\
 & \searrow f & \downarrow \alpha & \swarrow f & \\
 & & \mathbb{R}^1 & &
 \end{array}$$

В этой диаграмме φ — гомеоморфизм, p — проекция на сомножитель, отображение $f: f^{-1}(a) \rightarrow \mathbb{R}^1$ переводит $f^{-1}(a)$ в одну точку a , отображение α , существование которого постулируется, должно быть непрерывно, $f = \alpha\varphi$.

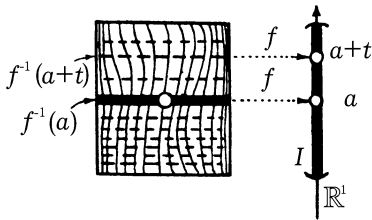


Рис. 29

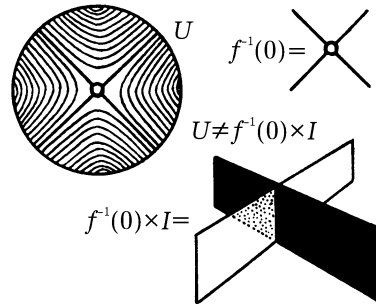


Рис. 30

Требование коммутативности диаграммы фактически означает, что гомеоморфизм φ является «послойным», т. е. поверхности $(f^{-1}(a), t)$ (при представлении окрестности U в виде прямого произведения) должны совпадать с поверхностями уровня $f^{-1}(a+t)$ (рис. 29).

Определение 4.2. Точка $x \in X$ называется *точкой бифуркации* (бифуркационной точкой) для данной функции f , если x не является правильной точкой для этой функции.

Рассмотрим простейшие примеры. Если $X = M$ — гладкое многообразие и f — гладкая функция на M , то любая точка, правильная для f в смысле теории гладких отображений (см. [2]), является правильной и в смысле определения 4.1. Если $x \in M$ — невырожденная критическая точка для гладкой функции f , то очевидно, что x — точка бифуркации (рис. 30). В то же время, если $x \in M$ — вырожденная критическая точка функции f , то она не обязана быть бифуркационной. В самом деле, рассмотрим $M = \mathbb{R}^1$ и в качестве f возьмем функцию $f(x) = x^3$. Тогда $x = 0$ является вырожденной критической точкой, однако это правильная точка в смысле определения 4.1 (рис. 31).

Поскольку все наши дальнейшие приложения связаны с функциями на многообразиях, то для простоты предположим, что $X = M$ — гладкое многообразие и f — гладкая функция на M . На рис. 32 условно показано взаимоотношение между вырожденными критическими точками, точками бифуркации и невырожденными критическими точками. Предположим, что f имеет на M лишь конечное число точек бифуркации (в частности, все они изолированы). Рассмотрим группы гомологий $H_*(M, A)$, где A — некоторое поле коэффициентов (напри-

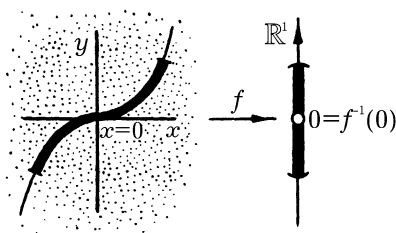


Рис. 31

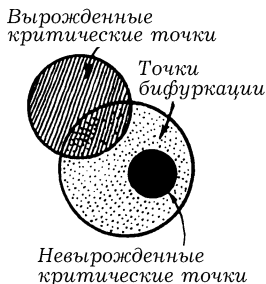


Рис. 32

мер, \mathbb{R} или \mathbb{Z}_p). В дальнейшем обозначение A будем опускать и просто писать $H_*(M)$. Через $\beta_k = \dim H_k(M)$ обозначим размерность группы $H_k(M)$ (над полем), называемую иногда k -мерным числом Бетти.

Определение 4.3. *Полиномом Пуанкаре пространства M* называется полином вида $P(M, t) = \sum_{k=0}^n \beta_k(M)t^k$, где $n = \dim M$.

Определение 4.4. Значение c для функции f называется *бифуркационным*, если поверхность уровня $f^{-1}(c)$ содержит хотя бы одну точку бифуркации.

Если f — функция Морса, то бифуркационные и критические значения совпадают. Пусть c_1, \dots, c_N (где $N < \infty$) — бифуркационные значения для f на M . Так как бифуркационных точек конечное число (см. выше), то все они изолированы. Пусть $\{x\}_\alpha$ — множество бифуркационных точек на поверхности уровня $f^{-1}(c_\alpha)$. Рассмотрим $M_{c_\alpha} = \{x \in M : f(x) \leq c_\alpha\}$. Относительные группы гомологий $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ являются, как мы сейчас обнаружим, важными инвариантами точек бифуркации функции f .

При этом под группой $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ мы будем понимать, в силу изолированности точек $\{x\}_\alpha$, группу $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus U\{x\}_\alpha)$, где $U\{x\}_\alpha$ — набор достаточно малых открытых окрестностей точек $\{x\}_\alpha$ (рис. 33). Рассмотрим

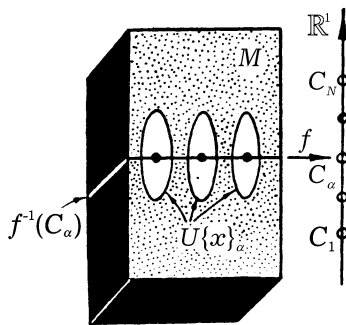


Рис. 33

целые числа $\beta_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$, где $\beta_k(X, Y) = \dim H_k(X, Y)$ (над полем).

Определение 4.5. *Полиномом Пуанкаре функции f на M назовем полином*

$$Q(M, f, t) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\{x\}_\alpha} \sum_{k=0}^n \beta_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) t^k.$$

2. Теорема, связывающая полиномы Пуанкаре функции и многообразия

Теорема 4.1. *Пусть $Q(M, f, t)$ и $P(M, t)$ — полиномы Пуанкаре функции и многообразия. Тогда разность полиномов $Q - P$ делится на $1 + t$, и отношение $(Q - P)/(1 + t)$ является полиномом с неотрицательными целыми коэффициентами.*

Доказательство.

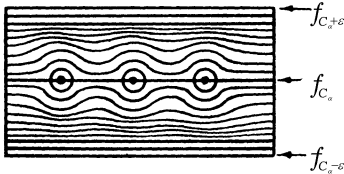


Рис. 34

Шаг 1. Рассмотрим числа $a < b$ из области значений функции f на M такие, что на отрезке $[a, b]$ нет бифуркационных значений f . Тогда M_b стягивается на M_a , и $H_*(M_b, M_a) = 0$. В самом деле, если f — функция Морса, то это утверждение было доказано нами в § 3. Если же f — не функция Морса, то нуж-

но сослаться на определение правильных точек 4.1. Поскольку все точки из «слоя» $f^{-1}[a, b]$ правильные, то $f^{-1}[a, b]$ можно покрыть конечным набором открытых окрестностей U , в каждой из которых выделено слоение траекториями — прообразами отрезка при гомеоморфизме φ . Эти траектории с успехом могут играть роль интегральных траекторий поля $v = -\text{grad } f$, использовавшегося в § 3 для построения стягивающей деформации. Из определения 4.1 следует, что эти траектории из разных окрестностей можно согласовать на пересечении окрестностей.

Шаг 2. Для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место изоморфизм

$$H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha) = H_k(M_{c_\alpha + \varepsilon}, M_{c_\alpha - \varepsilon}).$$

Это следует из предыдущего утверждения и определения группы $H_k(M_{c_\alpha}, M_{c_\alpha} \setminus \{x\}_\alpha)$ (рис. 34).

Шаг 3. Рассмотрим следующие три типа полиномов Пуанкаре:

$$\text{а) } P(M_a) = \sum_k \beta_k(M_a)t^k, \text{ б) } P(M_b, M_a) = \sum_k \beta_k(M_b, M_a)t^k,$$

$$\text{где } a < b, \text{ т. е. } M_a \subset M_b; \text{ в) } P(\text{Im } \partial) = \sum_k (\dim \text{Im } \partial_{k+1})t^k,$$

где оператор $\partial_{k+1}: H_{k+1}(M_b, M_a) \rightarrow H_k(M_a)$ является граничным оператором в точной гомологической последовательности пары (M_b, M_a) ; $\text{Im } \partial_{k+1} \subset H_k(M_a)$.

Шаг 4. Мы утверждаем, что $P(M_b, M_a) - (P(M_b) - P(M_a)) = (1 + t)P(\text{Im } \partial)$. Для доказательства рассмотрим точную гомологическую последовательность пары (M_b, M_a) , а именно:

$$\begin{aligned} H_{k+1}(M_b, M_a) &\xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(M_a) \xrightarrow{i} H_k(M_b, M_a) \xrightarrow{j} \\ &\xrightarrow{j} H_k(M_b, M_a) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_a). \end{aligned}$$

Из точности этой последовательности получаем следующую систему соотношений:

$$\begin{aligned} \beta_k(M_b, M_a) &= \dim \text{Im } j + \dim \text{Im } \partial_k; \\ \dim \text{Im } j &= \beta_k(M_b) - \dim \text{Im } i = \\ &= \beta_k(M_b) - (\beta_k(M_a) - \dim \text{Im } \partial_{k+1}) = \\ &= \beta_k(M_b) - \beta_k(M_a) + \dim \text{Im } \partial_{k+1}; \\ \beta_k(M_b, M_a) - \dim \text{Im } j &= \beta_k(M_b, M_a) - (\beta_k(M_b) - \beta_k(M_a)) - \\ &- \dim \text{Im } \partial_{k+1} = R_k - \dim \text{Im } \partial_{k+1} = \dim \text{Im } \partial_k; \\ R_k &= \beta_k(M_b, M_a) - (\beta_k(M_b) - \beta_k(M_a)). \end{aligned}$$

Таким образом, $t^k R_k = t^k \cdot \dim \text{Im } \partial_{k+1} + t(t^{k-1} \cdot \dim \text{Im } \partial_k)$, т. е. $\sum_k t^k R_k = (1 + t)P(\text{Im } \partial)$, что и требовалось. ■

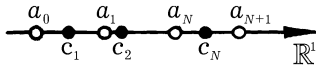


Рис. 35

Шаг 5. Рассмотрим все бифуркационные значения c_1, \dots, c_N функции f и числа $a_0, a_1, \dots, a_N, a_{N+1}$ такие, что $a_0 < c_1; a_i < c_i <$

$< a_{i+1}; c_N < a_{N+1}$, т. е. бифуркационные значения $\{c_i\}$ разделяются значениями $\{a_i\}$, бифуркационными уже не являющимися (рис. 35). Из утверждения шага 4 мы можем записать для каждого i следующее соотношение:

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) - (P(M_{a_{i+1}}) - P(M_{a_i})) = (1+t)P(\text{Im } \partial)_i,$$

где полином $P(\text{Im } \partial)_i$ имеет неотрицательные целые коэффициенты. Суммируя эти равенства по всем i от 0 до $N+1$, получаем

$$\sum_i P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) - P(M_{a_{N+1}}) + P(M_{a_0}) = (1+t)K(t),$$

где полином $K(t)$ имеет неотрицательные целые коэффициенты. Напомним, что

$$P(M_{a_{i+1}}, M_{a_i}) = P(M_{c_i}, M_{c_i} \setminus \{x\}_i)$$

в силу утверждения шага 2. Осталось заметить, что $P(M_{a_{N+1}}) = P(M)$, так как число a_{N+1} можно считать настолько большим, что $a_{N+1} > \max_{x \in M} f(x)$, а потому $M_{a_{N+1}} \equiv M$. Затем $P(M_{a_0}) = 0$, так как число a_0 можно выбрать так, чтобы $a_0 < \min_{x \in M} f(x)$, т. е. $M_{a_0} = \emptyset$, а в определении полинома Пуанкаре суммирование по индексу k начиналось с $k = 0$. Следовательно, полученное выше равенство превращается в $Q(M, f) - P(M) = (1+t)K(t)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

3. Некоторые следствия

Доказанная нами теорема имеет несколько содержательных следствий, некоторые из которых мы перечислим, в частности мы выведем классические неравенства Морса. Возьмем в качестве коэффициентов поле \mathbb{R} , пусть f — гладкая функция на M , тогда $P(M, t) = \sum_k \beta_k t^k$. Полином $Q(M, f, t)$ запишем в «приведенном виде», т. е. соберем вместе члены, содержащие одну и ту же степень t . Получим $Q = \sum_k \mu_k t^k$. Числа μ_k назовем числами Морса гладкой функции f на M . Эти числа получают наглядную интерпретацию, если f — функция Морса на многообразии.

Предложение 4.1. *Если f — функция Морса на M , то μ_k равно числу критических точек индекса k .*

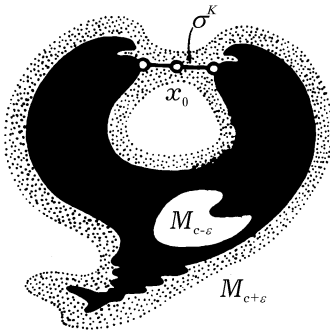


Рис. 36

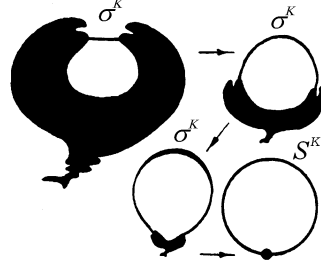


Рис. 37

Доказательство.

Пусть x_0 — единственная критическая точка индекса k на поверхности $f^{-1}(c) = f_c$. Подсчитаем полином $\sum_i \dim H_i(M_c, M_c \setminus x_0)t^i$.

Из доказательства теоремы 4.1 следует, что $H_i(M_c, M_c \setminus x_0) = H_i(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon})$. Но для функции Морса нам хорошо известны топологическая структура множества $M_{c+\epsilon}$ и его связь с множеством $M_{c-\epsilon}$. В самом деле, $M_{c+\epsilon}$ получается из $M_{c-\epsilon}$ приклейкой ручки H_k^n индекса k , а с гомотопической точки зрения $M_{c+\epsilon}$ имеет вид $M_{c-\epsilon} \cup \sigma^k$, где σ^k — клетка размерности k (рис. 36). Следовательно,

$$\begin{aligned} H_i(M_c, M_c \setminus x_0) &= H_i(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon}) = H_i(M_{c-\epsilon} \cup \sigma^k, M_{c-\epsilon}) = \\ &= H_i(M_{c-\epsilon} \cup \sigma^k / M_{c-\epsilon}) = H_i(\bar{\sigma}^k / \partial \sigma^k) = H_i(S^k) \end{aligned}$$

при $i > 0$ (рис. 37). Отсюда $\sum_i \dim H_i(M_c, M_c \setminus x_0)t^i = \sum_i \dim H_i(S^k)t^i = t^k$. Здесь мы воспользовались тем, что $H_0(X, Y) = 0$. Таким образом, в коэффициент при t^k в полиноме Q каждая критическая точка индекса k дает вклад, равный единице, следовательно, коэффициент μ_k при t^k указывает количество таких точек. Утверждение доказано. ■

Предложение 4.2. Для функции Морса f на M имеют место неравенства $\mu_k \geq \beta_k$ для любого k . Другими словами, числа Бетти β_k многообразия M оценивают снизу числа Морса μ_k .

Доказательство.

Из теоремы 4.1 и предложения 4.1 следует, что

$$Q(M, f) - P(M) = \sum_k (\mu_k - \beta_k) t^k = (1+t)K(t),$$

где полином, стоящий справа, имеет неотрицательные коэффициенты. Предложение доказано. ■

Топологический смысл этого утверждения ясен: независимых замкнутых циклов в размерности k не больше, чем полное число клеток размерности k . Предложение 4.2 следует уже из того, что каждой клетке отвечает одна критическая точка функции Морса.

Рассмотрим следующее равенство, вытекающее из теоремы 4.1:

$$\sum_k \mu_k t^k = \sum_k \beta_k t^k + (1+t)K(t). \text{ При } t = -1 \text{ получаем}$$

$$\sum_k (-1)^k \mu_k = \sum_k (-1)^k \beta_k,$$

где справа стоит величина, называемая эйлеровой характеристикой многообразия (альтернированная сумма чисел Бетти). Можно доказать, что эйлерова характеристика — гомотопический инвариант многообразия M . Отсюда следует, что альтернированная сумма чисел Морса для произвольной гладкой функции (с изолированными особенностями) уже не зависит от функции и является инвариантом многообразия.

Разложим далее $(1+t)^{-1}$ в ряд по t , получим $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^i$. Отсюда следует, что ряд $\left(\sum_k (\mu_k - \beta_k) t^k \right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^i$ имеет (после приведения подобных членов) неотрицательные коэффициенты. Фиксируя какое-либо k , получаем отсюда систему неравенств: $(\mu_0 - \beta_0)(-1)^k + (\mu_1 - \beta_1)(-1)^{k-1} + (\mu_2 - \beta_2)(-1)^{k-2} + \dots + (\mu_k - \beta_k) \geq 0$. Отсюда $\mu_k - \mu_{k-1} + \mu_{k-2} - \dots \pm \mu_0 \geq \beta_k - \beta_{k-1} + \beta_{k-2} - \dots \pm \beta_0$. Полезно представлять себе, как устроены полиномы $Q(M, f)$ в тех случаях, когда бифуркационные точки не являются невырожденными критическими точками. Пусть, например, x_0 — вырожденная точка для функции f . В качестве частного случая рассмотрим $f(x, y) = \operatorname{Re}(z^n)$, где $z = x + iy$. На рис. 38 показано поведение линии уровня f_c . Ясно, что $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} = S^1 \vee \dots \vee S^1$ ($n-1$ раз). Отсюда получаем, что полином Q в точке x_0 имеет вид $t + \dots + t = (n-1)t$. Как мы видим,

полином отличается от тех, которые появляются для невырожденных особенностей. Появление коэффициента $n - 1$ при переменной t находит объяснение в следующем геометрическом факте.

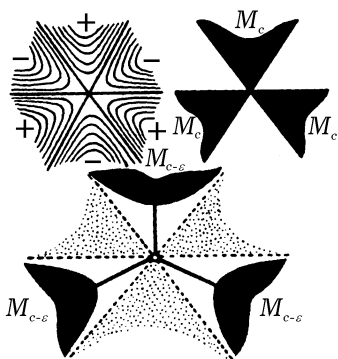


Рис. 38

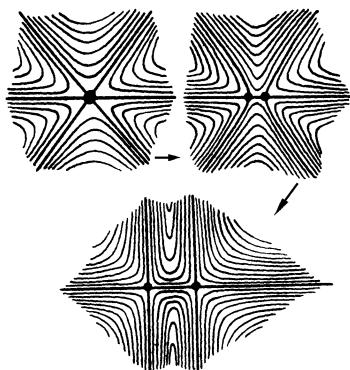


Рис. 39

Известно, что вырожденные критические точки можно путем малых возмущений исходной функции превращать в объединение невырожденных критических точек (распад вырожденных особенностей). В нашем примере малое возмущение функции $\operatorname{Re}(z^n)$ можно выбрать так: $\operatorname{Re}(z - a_1) \dots (z - a_n)$, где числа $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, $a_i \in \mathbb{R}$. На рис. 39 изображена качественная картина возмущения линий уровня функции. Ясно, что $M_{c+\epsilon}/M_{c-\epsilon} = S^1 \vee \dots \vee S^1$ ($n - 1$ раз), и вырожденная особенность порядка n распадается в объединение невырожденных (квадратичных) особенностей в количестве $n - 1$. Так как значение полинома Q в невырожденной критической точке индекса 1 равно t , то число $\mu_1 t = (n - 1)t = t + \dots + t$ ($n - 1$ раз) и указывает нам, сколько невырожденных особенностей появится при распаде одной вырожденной особой точки функции $\operatorname{Re}(z^n)$.

В действительности, здесь мы столкнулись с некоторым общим свойством полинома $Q(M, f)$, а именно: он не меняется при достаточно малом возмущении функции f . Дело в том, что этот полином выражен в терминах относительных групп гомологий $H_*(M_{c+\epsilon}, M_{c-\epsilon})$, которые, очевидно, не меняются при малых возмущениях f , поскольку неособая поверхность уровня остается неособой, если возмущение достаточно мало. Следовательно, полный полином $Q(M, f)$ указывает,

сколько невырожденных критических точек каждого индекса появляется при распаде вырожденных особенностей функции (при ее достаточно малом возмущении). Отметим, что полином Q в вырожденной критической точке не обязан быть однородным полиномом, как это было в предыдущем примере. В самом деле, пусть $f(x, y, z) = x^3 - 3x(y^2 + z^2)$. Найдем $H_*(M_{c+\varepsilon}, M_{c-\varepsilon})$. Топологическая схема поверхностей уровня показана на рис. 40. Ясно, что $M_{c+\varepsilon}/M_{c-\varepsilon} \approx S^1 \vee S^2$, т. е. Q в точке x_0 имеет вид $t + t^2$.

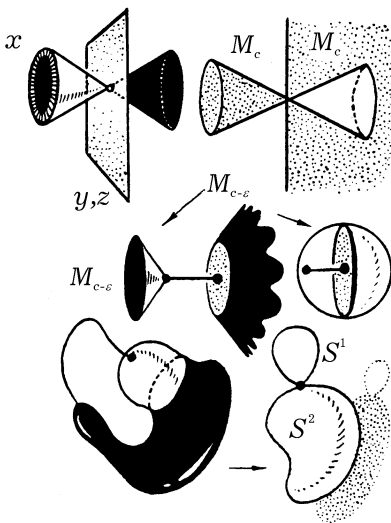


Рис. 40

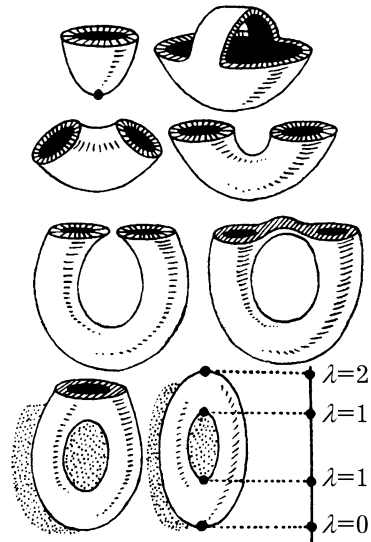


Рис. 41

4. Критические точки функций на двумерных многообразиях

Пусть f — гладкая функция на двумерном гладком замкнутом связном ориентируемом многообразии. Поскольку каждое такое многообразие M_g^2 (сфера с g ручками) может быть вложено в \mathbb{R}^3 , то среди функций Морса выделяется класс «функций высоты», определяемых как проекция многообразия M_g^2 на какую-либо фиксированную прямую в \mathbb{R}^3 [1, с. 493–494] показано, что среди таких «функций высоты» всегда можно обнаружить функцию Морса. На рис. 41 показан последо-

вательный процесс восстановления тора $T^2 = M_{1=g}^2$ при стандартном его вложении в \mathbb{R}^3 таком, что $z = f(P)$, $P \in T^2$ (функция высоты) является функцией Морса с четырьмя невырожденными критическими точками: x_1 (минимум), x_2, x_3 (седла индекса 1), x_4 (максимум). Для рода $g > 1$ аналогичная функция высоты на M_g^2 имеет $2g + 2$ невырожденных критических точек: x_1 (минимум), x_2, \dots, x_{2g+1} (седла индекса 1), x_{2g+2} (максимум) (рис. 42).

Однако, как мы видели, связь между бифуркационными точками функции и гомологиями ее области определения (многообразия) имеется и в том случае, когда особенности функции вырождены. Как мы видели, невырожденные особенности могут сливаться, образуя одну вырожденную особую точку. Следовательно, число вырожденных особенностей, например на M_g^2 , может быть меньше чем $2g + 2$. При этом, конечно, структура вырожденных точек более сложна, чем у невырожденных (см. выше). На любом M_g^2 можно построить гладкую функцию высоты f в \mathbb{R}^3 с четырьмя критическими точками: минимум, максимум и два седла, которые будут вырождены при $g > 1$. Искомое вложение $M_g^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ показано на рис. 43. Для этого нужно склеить две показанные на рисунке конструкции, воспроизведя при этом трубчатую окрестность $g + 1$ меридианов, соединяющих северный и южный полюсы сферы (рис. 44). Два седла x_2, x_3 вырождены при $g > 1$ и функция высоты в окрестности этих точек устроена локально как функция $\text{Re}(z^{g+1})$ (рис. 45).

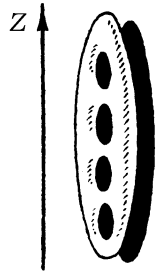


Рис. 42

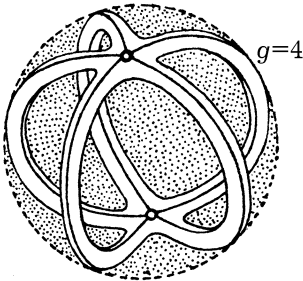


Рис. 43

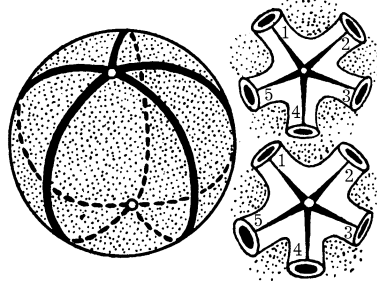


Рис. 44

Можно показать, что наименьшее число критических точек функции высоты на M_g^2 (где $g > 1$) равно четырем (и мы предъявили такую функцию высоты). Однако если мы откажемся от требования, чтобы f была функцией высоты, то тогда число критических точек можно еще уменьшить на единицу, а именно на любом двумерном гладком компактном связном замкнутом многообразии (ориентируемом M_g^2 , $g > 1$ или неориентируемом M_μ^2) всегда существует гладкая функция только с тремя критическими точками: минимум, максимум и вырожденное седло. Мы предъявим эту функцию f , задав систему линий уровня f на многообразии. Для этого воспользуемся теоремой классификации двумерных поверхностей [2] и представим M_g^2 (или M_μ^2 в неориентируемом случае, где μ — число пленок Мебиуса, вклеенных в сферу) в виде склейки фундаментального многоугольника W , для которого возьмем симметричную каноническую форму, а именно $W = a_1 \dots a_N a_1^{-1} \dots a_{N-1}^{-1} a_N^{\pm 1}$ [2, с. 268], где «+1» отвечает неориентируемому случаю, а «-1» — ориентируемому (рис. 46). Разделив этот

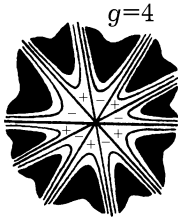


Рис. 45

многоугольник пополам, зададим f ее линиями уровня (задание это неоднозначно). При этом слева от отрезка AB (делящего пополам W) поместим точку максимума, справа — точку минимума. При этом третья критическая точка — вырожденное седло — окажется в вершинах фундаментального многоугольника (напомним, что все эти наши вершины отождествлены в одну точку на поверхности) (см. рис. 46). Ясно, что построенная нами функция f имеет в малой окрестности этого вырожденного седла вид $\operatorname{Re}(z^\alpha)$ (найдите

число α как функцию от g или от μ). Видно, в каком месте мы использовали симметричность кода W : разбив W пополам отрезком AB , мы гарантировали, что в каждой внутренней точке любой стороны a_i функция f имеет ненулевой градиент: она либо продолжает расти, переходя через a_i , либо продолжает убывать. Если бы по одну сторону отрезка AB оказалась бы пара сторон, занумерованных одной буквой, то эта сторона была бы целиком заполнена вырожденными особенностями функции. При малом возмущении построенной нами гладкой функции единственное вырожденное седло распадается в объединение невырожденных седел, как это показано на рис. 47.

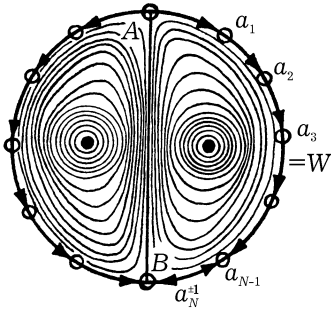


Рис. 46

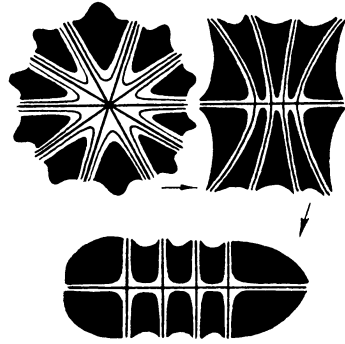


Рис. 47

Задача. Докажите, что построенная выше функция не может быть реализована как некоторая функция высоты при гладком вложении двумерной поверхности \mathbb{R}^3 .

С другой стороны, число точек бифуркаций гладкой функции f на $M_{g>1}^2$ (или на $M_{\mu>0}^2$) не может быть меньше трех, т. е. в двумерном случае мы предъявили функцию с наименьшим возможным числом особенностей (равным трем). В самом деле, имеет место

Предложение 4.3. Пусть на компактном связном гладком замкнутом многообразии M^n существует гладкая функция f , имеющая ровно две критические точки (быть может, вырожденные). Тогда многообразие гомеоморфно сфере S^n .

Доказательство.

Мы докажем это утверждение в том случае, когда обе точки невырождены. Рассмотрение вырожденного случая более нетривиально, и мы его здесь опустим. Итак, в силу компактности M одна из этих точек x_0 должна быть минимумом, вторая x_1 — максимумом функции. Пусть $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$. В силу предложения 3.2 и теоремы 3.2 для достаточно малого $\varepsilon > 0$ множества $M_{+\varepsilon}$ и $M \setminus M_{1-\varepsilon} = f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ диффеоморфны дискам размерности n . Рассмотрим векторное поле $v = -\text{grad } f$ и, применяя лемму 3.1, получим, что M^n гомеоморфно склейке двух дисков по их общей границе, т. е. гомеоморфно сфере. Утверждение доказано. ■

В частности, при $n = 2$ мы сразу получаем, что на многообразиях $M_{g>1}^2$ и $M_{\mu>0}^2$ не может быть гладкой функции с двумя особенностями, так как эти многообразия не гомеоморфны сфере (см. теорему классификации и вычисление групп гомологий этих поверхностей).

Отметим, что при $n \geq 7$ многообразие M^n , на котором есть функция с двумя особенностями (пусть даже невырожденными), отнюдь не обязано быть диффеоморфным стандартной сфере S^n , хотя M^n и гомеоморфно сфере S^n . Это связано с тем, что существуют, например, семимерные гладкие замкнутые многообразия, гомеоморфные, но не диффеоморфные стандартной сфере S^n . В то же время на таких многообразиях существуют функции Морса с двумя невырожденными критическими точками. При $n = 2$ или 3 таких интуитивно необъяснимых явлений нет, т. е. наличие гомеоморфизма влечет за собой наличие диффеоморфизма. Не следует думать, что эти странные «многомерные эффекты» связаны с какой-то «патологией многообразий». Так, например, в размерности семь существует 28 гладких многообразий, которые все гомеоморфны стандартной сфере S^7 , но попарно не диффеоморфны; причем эти многообразия могут быть заданы внешне достаточно простыми полиномиальными уравнениями в комплексном пространстве $\mathbb{C}^5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$. Для этого достаточно рассмотреть сферу S^9 , заданную в $\mathbb{C}^5 = \mathbb{R}^{10}$ уравнением $|z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = 1$, и рассмотреть восьмимерную алгебраическую поверхность, задаваемую в \mathbb{C}^5 одним комплексным уравнением $z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$, где целое число k может принимать любое из следующих значений: $k = 1, 2, \dots, 28$. Пересечение этой поверхности со сферой S^9 дает некоторое семимерное многообразие. Меняя число k , мы получим 28 семимерных многообразий, которые гомеоморфны сфере S^7 , но попарно не диффеоморфны. Интересующийся подробностями читатель может обратиться, например, к [5]. Можно показать далее, что указанные выше полиномиальные уравнения, задающие эти «нестандартные сферы», являются в некотором смысле простейшими из возможных, в частности определяемые ими римановы метрики на этих многообразиях, индуцированные объемлющей евклидовой метрикой из \mathbb{C}^5 , являются метриками с наибольшей возможной (для этих многообразий) группой изометрий. Другими словами, указанные вложения являются наиболее «симметричными», обладающими наибольшей группой движений. Одно из перечисленных выше многообразий диффеоморфно стандартной сфере.

Как было уже показано выше, критические точки могут иногда

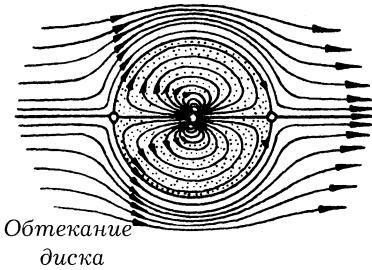


Рис. 48

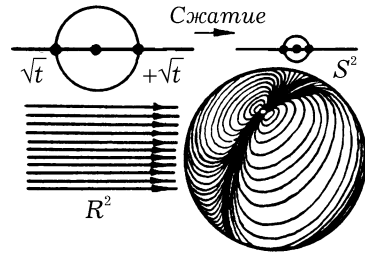


Рис. 49

сливаться в одну, порождая более сложную вырожденную особенность функции. Впрочем, при таком слиянии может происходить и процесс взаимного уничтожения особенностей. Продемонстрируем это на простом примере. Рассмотрим на сфере функцию Жуковского $z + 1/z$ и положим $f(x, y) = \text{Re}(z + 1/z)$ (в конечной части плоскости). Тогда интегральные траектории поля $\text{grad } f$ имеют вид, показанный на рис. 48. При этом имеются три особые точки: два седла (в точках ± 1) и вырожденная особенность (полюс первого порядка) в точке 0. Устраивая деформацию функции следующего вида $\varphi_t f = \text{Re}(z + t/z)$, получаем, что сепаратрисная диаграмма потока $\text{grad } \varphi_t f$ (т.е. совокупность интегральных траекторий, соединяющих особые точки) деформируется по плоскости и, наконец, сжимается в одну точку, в которой все три особенности, взаимодействуя, уничтожают друг друга. В результате (при $t = 0$) мы получаем гладкую функцию $\text{Re}(z) = x$, вообще не имеющую никаких особых точек в конечной части плоскости (и имеющую полюс первого порядка в бесконечно удаленной точке, т.е. в северном полюсе сферы) (рис. 49). Таким образом, рассматривая непрерывные деформации функции в пространстве всех гладких функций (с особенностями) на M , мы можем существенно менять картину распределения ее критических (бифуркационных) точек. В то же время, как было доказано выше, для гладких функций есть четкая связь (типа неравенств) между критическими точками f на M и топологией M , а именно связь с группами гомологий. Интересно также выяснить, какое наименьшее число особенностей (быть может, вырожденных) может иметь гладкая функция на заданном многообразии. Ответу на этот вопрос посвящен следующий параграф.

§ 5. Критические точки функций и категория многообразия

1. Определение категории

Как было доказано выше, если f — функция Морса на M , то число ее критических точек индекса λ всегда не менее числа β_λ , где $\beta_\lambda = \dim H_\lambda(M, A)$. Здесь группа коэффициентов A — одна из следующих групп: \mathbb{R} , \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_p , где $p \neq 2$ и p — простое. Например, если $M = M_g^2$, то любая функция Морса имеет на M не менее $2g + 2$ особенностей. Однако как только мы переходим к рассмотрению точек бифуркации, в частности позволяем невырожденным особенностям сливаться в вырожденные и начинаем рассматривать всевозможные гладкие деформации исходной функции в пространстве всех гладких функций, так сразу же ситуация резко усложняется, поскольку взаимодействия особенностей при их слиянии и распаде устроены достаточно сложно. При этом «сложность» точек бифуркации может как увеличиваться, так и уменьшаться при этих процессах. Для точек бифуркации неравенства типа $\sum_\lambda \pm \mu_\lambda \geq \sum_\lambda \pm \beta_\lambda$ по-прежнему выполнены и в том случае, когда f — не функция Морса, но теперь числа μ_λ не имеют того простого смысла, какой они приобретали в случае функций Морса (для функций Морса μ_λ равно числу критических точек индекса λ). В общем случае числа μ_λ описывают «степень сложности» точек бифуркации, которая вычисляется через группы гомологий поверхностей уровня, близких к бифуркационной поверхности (т.е. содержащей точки бифуркации). В то же время μ_λ уже не дают прямой информации о числе точек бифуркации. Кроме того, не каждая вырожденная особенность является бифуркационной (см. выше). Таким образом, ввиду нетривиальности подсчета чисел μ_λ и ввиду того, что во многих приложениях интерес представляет лишь вопрос, сколько у функции f имеется точек бифуркации, мы сосредоточим внимание только на том, каково наименьшее число особенностей у функции f на заданном многообразии. Оказывается, этот вопрос решается в терминах некоторого нового топологического инварианта — категории Люстерника–Шнирельмана — связываемого с произвольным комплексом (пространством). Интересно, что этот инвариант оказывается полезным и при анализе некоторых «бесконечномерных» вариационных задач, например при отыскании числа замкнутых геодезических на многообразиях.

Определение 5.1. Пусть X — топологическое хаусдорфово пространство, $A \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество в X . Категорией $\text{cat}_X A$ замкнутого подмножества A относительно пространства X называется минимальное число k , для которого существуют замкнутые подмножества A_1, \dots, A_k в X такие, что A является их объединением $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, и каждое из этих подмножеств стягивается по пространству X в точку. Связность подмножеств A_i не предполагается.

Для простоты будем в дальнейшем считать, что X связно. Если $A = X$, то будем считать (по определению), что $\text{cat}_X X = \text{cat} X$. Таким образом, $\text{cat}_X A$ является положительным целым числом. Ниже мы докажем некоторые основные свойства этого числа.

2. Топологические свойства категории

Лемма 5.1. Если $A \subset B \subset X$ — замкнутые подмножества в X , то $\text{cat}_X A \leq \text{cat}_X B$.

Доказательство.

Пусть $q = \text{cat}_X B$, т.е. существуют замкнутые подмножества B_1, B_2, \dots, B_q такие, что $B = \bigcup_{i=1}^q B_i$, и каждое множество B_i стягивается по X в точку. Рассмотрим новые замкнутые подмножества $A_i = A \cap B_i, 1 \leq i \leq q$. Ясно, что $A = \bigcup_{i=1}^q A_i$ и каждое множество A_i стягивается по X в точку (вслед за B_i) (рис. 50). Отсюда $\text{cat}_X A \leq q = \text{cat}_X B$, что и требовалось. ■

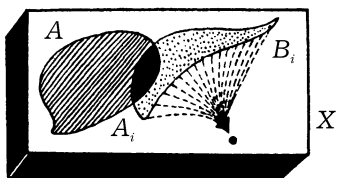


Рис. 50

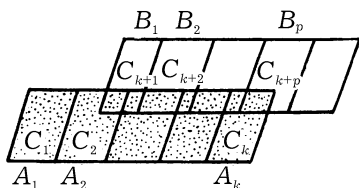


Рис. 51

Лемма 5.2. Пусть A и B — два произвольных замкнутых подмножества в X . Тогда $\text{cat}_X A \cup B \leq \text{cat}_X A + \text{cat}_X B$.

Доказательство.

Пусть $\text{cat}_X A = k$, $\text{cat}_X B = p$, $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^p B_j$, тогда $A \cup B = \bigcup_{q=1}^{p+k} C_q$, где $C_q = A_q$ при $1 \leq q \leq k$ и $C_q = B_{q-k}$ при $k+1 \leq q \leq k+p$. Так как $\{A_i\}$ и $\{B_j\}$ стягивались по X в точку, то C_q стягиваются в точку и $\text{cat}_X C \leq k+p = \text{cat}_X A + \text{cat}_X B$, что и требовалось (рис. 51). ■

Лемма 5.3. Пусть $A \subset B$ — замкнутые подмножества в X . Тогда $\text{cat}_X \overline{B \setminus A} \geq \text{cat}_X B - \text{cat}_X A$, где $\overline{B \setminus A}$ замыкание множества $B \setminus A$ в X .

Доказательство.

Так как $B = A \cup \overline{B \setminus A}$, то в силу леммы 5.2 получаем $\text{cat}_X B \leq \text{cat}_X A + \text{cat}_X \overline{B \setminus A}$, что и требовалось. ■

Лемма 5.4. Пусть $A \subset B \subset X$ — замкнутые подмножества в X и пусть множество B непрерывно деформируется по X в подмножество A , т. е. существует гомотопия φ_t вложения $i: B \rightarrow X$ в такое отображение $\varphi_1: B \rightarrow X$, при котором $\varphi_1 B \subseteq A$. Тогда $\text{cat}_X A \geq \text{cat}_X B$.

Отметим, что множество $\varphi_1 B$ может быть не гомеоморфно B .

Доказательство.

Пусть $\text{cat}_X A = k$; рассмотрим покрытие $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где все множества A_i стягиваются по X в точку. Так как $\varphi_1 B \subseteq A$, то можно рассмотреть $H_j = (\varphi_1 B) \cap A_j$, $1 \leq j \leq k$. В силу условий леммы существует непрерывное отображение $h: iB \rightarrow \varphi_1 B$, где подмножество iB_k гомеоморфно B . Положим $B_j = h^{-1}H_j$, $1 \leq j \leq k$. Ясно, что $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$. Далее, применив к B_j гомотопию φ_t , мы деформируем B_j по X в подмножество $\varphi_1 B_j = H_j \subset A_j$, т. е. H_j , стягивается по X в точку; тем самым каждое B_j стягивается по X в точку. Отсюда $\text{cat}_X B \leq k$, что и требовалось (рис. 52). ■

Лемма 5.5. Пусть A — замкнутое подмножество в многообразии X . Тогда существует число $\varepsilon > 0$ (зависящее, вообще говоря, от A) такое, что $\text{cat}_X U_\varepsilon A = \text{cat}_X A$, где $U_\varepsilon A$ — замкнутая ε -окрестность подмножества $A \subset X$.