

Рис. 52

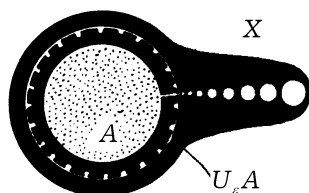


Рис. 53

*Доказательство.*

Поскольку  $A \subset U_\varepsilon A$ , то в силу леммы 5.1 имеем  $\text{cat}_X A \leq \text{cat}_X U_\varepsilon A$ . Осталось проверить обратное неравенство. Пусть  $\text{cat}_X A = k$  и  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , где каждое множество  $A_i$  стягивается в точку. Так как  $X$  — многообразие, то существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что окрестность  $U_\varepsilon A$  стягивается в точку по  $X$  вслед за множеством  $A_i$ . Так как  $U_\varepsilon A = \bigcup_{i=1}^k U_\varepsilon A_i$ , то  $\text{cat}_X U_\varepsilon A \leq k = \text{cat}_X A$ , что и требовалось. ■

Если  $X$  — не многообразие, то утверждение леммы 5.5 не имеет места. Пример показан на рис. 53.

Если  $X$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$ , то можно определить расстояние между любыми двумя замкнутыми подмножествами  $A$  и  $B$  в  $X$ , положив

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y) + \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \rho(x, y),$$

где  $\rho(x, y)$  — расстояние в  $X$  между точками  $x$  и  $y$ .

**Лемма 5.6.** Пусть  $A, B_n$  (где  $n = 1, 2, \dots$ ) — замкнутые подмножества в многообразии  $X$ , снабженном метрикой  $\rho$ , причем  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ , т.е.  $\rho(A, B_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $\text{cat}_X B_n \geq k$  при всех  $n$ , то тогда и  $\text{cat}_X A = \text{cat}(\lim B_n) \geq k$ .

*Доказательство.*

Из леммы 5.5 следует существование  $\varepsilon > 0$  такого, что  $\text{cat}_X U_\varepsilon A = \text{cat}_X A$ . Так как  $\rho(A, B_n) \rightarrow 0$ , то существует номер  $N$  такой,

что  $B_n \subset U_\varepsilon A$  для всех  $n > N$ . Отсюда  $k \leq \text{cat}_X B_n \leq \text{cat}_X U_\varepsilon A = \text{cat}_X A$ , что и требовалось. ■

### 3. Формулировка теоремы о нижней границе числа точек бифуркации

**Теорема 5.1.** Пусть  $M^n$  — гладкое компактное связное замкнутое многообразие и  $f$  — гладкая функция на  $M$ . Тогда выполнено неравенство  $k \geq \text{cat } M$ , где  $k$  — число различных точек бифуркации функции  $f$ . Аналогично  $p \geq \text{cat } M$ , где  $p$  — число различных критических точек (быть может, вырожденных) функции  $f$ .

Для простоты мы будем доказывать эту теорему для случая критических точек, поскольку для точек бифуркации рассуждения повторяются практически дословно с заменой интегральных траекторий векторного поля  $\text{grad } f$  на слоение окрестностей  $U$  траекториями — прообразы сомножителя  $I$  при гомеоморфизме  $U = f_a \times I$  (см. § 4).

Доказательство этой теоремы в значительной степени следует одной простой аналогии, имеющейся между поведением собственных чисел билинейной формы в  $\mathbb{R}^n$  и поведением некоторых чисел, связанных с множествами фиксированной категории. Мы вкратце опишем эту аналогию, поскольку она позволяет легко следить за цепочкой дальнейших рассуждений. Пусть  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  — стандартная сфера радиуса 1 и  $B(x, y)$  — симметричная билинейная вещественнозначная форма в  $\mathbb{R}^n$ . Эта форма определяет на сфере гладкую функцию  $f(x) = B(x, x)$ . Найдем критические точки этой функции. Пусть  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — симметричный линейный оператор такой, что  $B(x, x) = \langle Bx, x \rangle$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — евклидово скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ .

**Лемма 5.7.** Точка  $x_0 \in S^{n-1}$  является критической тогда и только тогда, когда  $Bx_0 = \lambda x_0$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , т. е.  $x_0$  — собственный вектор формы.

*Доказательство.*

Пусть  $a \in T_{x_0} S^{n-1}$  — произвольный касательный вектор и  $x(t)$  — гладкая кривая в сфере, проходящая через точку  $x_0 = x(0)$  и такая, что  $\dot{x}(0) = a$ . Запишем функцию  $f$  в виде  $\langle Bx, x \rangle$ . Тогда

$$\left. \frac{df}{da} \right|_{x_0} = \left. \frac{d}{dt} \langle B(x(t)), x(t) \rangle \right|_{t=0} = 2 \langle Bx, \dot{x} \rangle \Big|_{t=0} = 2 \langle Bx_0, a \rangle.$$

Ясно, что  $\left. \frac{df}{da} \right|_{x_0} = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_0$  — критическая точка для  $f$ , т. е. когда  $\text{grad } f(x_0)$ . С другой стороны, это эквивалентно тому, что  $\langle Bx_0, a \rangle = 0$  для любого касательного вектора  $a$ , т. е.  $Bx_0 \perp \perp T_{x_0}S^{n-1}$ . Таким образом, что  $Bx_0$  пропорционален вектору  $x_0$ . ■

Известно, что среди собственных векторов формы  $B$  можно выбрать ортобазис  $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ . Выбор чисел  $0, 1, \dots, n-1$  в качестве номеров будет ниже обоснован. Пусть  $\lambda_i$  — собственное число, отвечающее  $e_i$ . Упорядочим все числа  $\lambda_i$  (и векторы  $e_i$ ) так, что  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ . Рассмотрим в сфере  $S^{n-1}$  множество  $E_i$  всех ее  $i$ -мерных «экваторов»  $S^i$ , т. е. сечений сферы плоскостями размерности  $i+1$ , проходящими через начало координат. Из теории квадратичных форм известно, что число  $\lambda_i$  можно представить в виде

$$\lambda_i = \inf_{S^i \in E_i} (\max_{x \in S^i} f(x)), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

т. е. оно равно наименьшему максимуму, который функция  $f$  достигает на экваторах  $S^i$ . Из определения выражения, стоящего в правой части равенства, ясно, что  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ . Все экваторы  $S^i$  класса  $E_i$  получаются из какого-то одного экватора  $S_0^i$  путем подходящего ортогонального преобразования  $g \in SO_n$ . Другими словами, ортогональная группа  $SO_n$  транзитивно действует на множестве  $E_i$ . Так как функция  $f = \langle Bx, x \rangle$  инвариантна относительно отражения  $x \rightarrow -x$ , то  $f$  является фактически функцией на вещественном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Эту функцию мы обозначим той же буквой  $f$ .

**Лемма 5.8.** Пусть  $f$  — функция на  $\mathbb{R}P^{n-1}$ , определенная выше. Тогда число различных критических точек функции  $f$  на  $\mathbb{R}P^{n-1}$  не меньше числа классов  $E_i$ , т. е. не меньше  $n$ .

*Доказательство.*

Если все собственные числа формы  $B$  различны, то критическими точками функции  $f$  на сфере являются точки  $\pm e_i, 0 \leq i \leq n-1$ , что и дает  $n$  точек на  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Если же для некоторых  $i, j$  имеем  $\lambda_i = \lambda_j$ , то форма  $B$  имеет линейное подпространство собственных векторов, отвечающих  $\lambda_i$ ; следовательно, сфера  $S^{j-i}$  целиком состоит из вырожденных критических точек функции. Поскольку этих точек бесконечно много, то лемма доказана. ■

Переходя теперь к изучению критических точек функций на произвольном многообразии, мы сделаем в изложенной выше конструкции следующие замены: 1) сферу  $S^{n-1}$  заменим на многообразие  $M$ , 2) форму  $B(x, x)$  на сфере заменим на гладкую функцию  $f$  на многообразии, 3) вместо ортогональных преобразований, сохраняющих каждый класс  $E_i$  мы рассмотрим непрерывные деформации замкнутых подмножеств в  $M$ , 4) классы  $E_i$  заменим на классы  $M_i$  составленные из подмножеств, категория которых не меньше  $i$ , 5) вместо собственных чисел  $\lambda_i$ , рассмотрим некоторые их аналоги, определяемые формулой, аналогичной минимаксной формуле, приведенной выше для  $\lambda_i$ .

Тогда оказывается, что эти замены позволяют сформулировать и доказать аналог леммы 5.8, который и будет искомой теоремой 5.1.

#### 4. Доказательство теоремы

Обозначим через  $M_i$  класс всех замкнутых подмножеств  $X \subset M^n$  таких, что  $\text{cat}_M X \geq i$ . Ясно, что  $M_i \supseteq M_{i+1}$ . Пусть  $\theta$  — пространство всех замкнутых подмножеств в  $M$ . Тогда  $\theta$  снабжается естественной структурой метрического пространства путем введения метрики  $\rho(X, Y)$ , определение которой см. в п. 2. Будем говорить, что  $Y = \lim_{q \rightarrow \infty} X_q$ , если  $\rho(X_q, Y) \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ .

**Лемма 5.9.** *Каждый класс  $M_i$  является подмножеством в  $\theta$ , замкнутым относительно двух операций: а) предельного перехода, т. е.  $Y \in M_i$  если  $\lim_{q \rightarrow \infty} X_q$ ,  $X_q \in M_i$ ; б) непрерывной деформации подмножеств по многообразию  $M$ , т. е.  $T \in M_i$  если  $Y = \varphi_1 X$ , где  $\varphi_t: X \rightarrow M$  — гомотопия исходного вложения.*

*Доказательство.*

Пусть  $X_q \in M_i$ ,  $q = 1, 2, \dots$ ;  $Y = \lim_{q \rightarrow \infty} X_q$ ,  $X_q \in M_i$ . Требуется доказать, что  $Y \in M_i$ . Но это сразу вытекает из леммы 5.6. Далее, пусть  $Y = \varphi_1 X$ , где  $\varphi_t: X \rightarrow M$ . Так как  $\text{cat}_M X \geq i$ , то из леммы 5.4 получаем, что  $\text{cat}_M Y \geq i$ , что и требовалось доказать. ■

Фиксируем класс  $M_i$ , и пусть  $X \in M_i$ . Построим число  $\lambda = \inf_{X \in M_i} (\max_{x \in X} f(x))$ . Ясно, что это определение скопировано с определения собственных чисел  $\lambda_i$ , формы  $B$  (см. п. 3). Пусть  $N$  — категория  $M$ , т. е.  $N = \text{cat}_M M$ . В условиях теоремы 5.1 имеем  $N < \infty$ . Получаем цепочку вложений:  $\theta = M_0 = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_N$ . Здесь можно считать, что  $\theta = M_0 = \{X \in \theta, \text{cat}_M X \geq 0\}$ ; ясно, что  $\text{cat}_M X \geq 0$  для

любого  $X \in \theta$ . Класс  $M_N$  содержит само многообразие  $M$ . Ясно также, что  $M_N$  — последний класс в указанной цепочке, так как подмножеств категории, большей, чем  $N$ , не существует.

Функция  $f$  на  $M$  индуцирует функции  $f_0, \dots, f_N$ , определенные соответственно на классах  $M_0, \dots, M_N$ , а именно  $f_i(X) = \max_{x \in X} f(x)$ , где  $X \in M_i$ . Тогда  $\lambda_i = \inf_{X \in M_i} f_i(X)$ . Так как  $M_i \supseteq M_{i+1}$ , то с ростом  $i$  числа  $\lambda$  не убывают, т. е.  $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_N$ . Так как классы  $M_i$  замкнуты в  $\theta$  относительно операции предельного перехода (см. лемму 5.9), то в каждом классе  $M_i$  существует элемент  $X_i^0$  (замкнутое подмножество в  $M$ ) такой, что  $f_i(X_i^0) = \lambda_i$ . Иными словами,  $X_i^0$  — это такое подмножество в  $M$ , на котором  $\lambda_i = \max_{x \in X_i^0} f(x)$ .

**Лемма 5.10.** *На поверхности уровня  $f_{\lambda_i}$  имеется по крайней мере одна критическая точка функции  $f$ .*

*Доказательство.*

Допустим противное, пусть на  $f_{\lambda_i}$  нет критических точек функции  $f$ . Рассмотрим класс  $M_i$ , и пусть  $X_i^0 \in M_i$  — такое замкнутое подмножество в  $M$ , для которого  $\max_{x \in X_i^0} f(x) = \lambda_i$ , т. е.  $f_i(X_i^0) = \lambda_i$ . Поскольку  $X_i^0$  замкнуто в  $M$ , то существует точка  $x_i^0 \in X_i^0$  такая, что  $x_i^0 \in f_{\lambda_i}$ , т. е.  $f(x_i^0) = \lambda_i$ . Так как, по предположению,  $\text{grad } f(x) \neq 0$  для любого  $x \in f_{\lambda_i}$  то в силу компактности  $M$  существует достаточно малая деформация поверхности  $f_{\lambda_i}$  вдоль интегральных траекторий векторного поля —  $\text{grad } f$  в область меньших, чем  $\lambda_i$ , значений функции  $f$  (рис. 54). Так как  $M$  — компактное многообразие, то в силу леммы 3.1 существует гладкая гомотопия  $\varphi_t: M \rightarrow M$  такая, что каждое отображение  $\varphi_t$  — диффеоморфизм  $M$ , причем  $\varphi_t$  является тождественным отображением вне слоя  $\lambda_i - h \leq f \leq \lambda_i + q$ , где  $\lambda_i - h < \lambda_i - \varepsilon$  и  $\lambda_i < \lambda_i + q$  и  $\varphi_1$  переводит поверхность  $f_{\lambda_i}$  в поверхность  $f_{\lambda_i - \varepsilon}$  (рис. 55).

Обозначим через  $\tilde{X}_i^0$  образ  $X_i^0$  при деформации  $\varphi_1$ . Поскольку  $\tilde{X}_i^0$  получено из  $X_i^0$  гомотопией по  $M$ , то в силу леммы 5.4 имеем  $\text{cat}_M \tilde{X}_i^0 \geq \text{cat}_M X_i^0$ . Итак,  $\text{cat}_M \tilde{X}_i^0 \geq i$ , т. е.  $\tilde{X}_i^0 \in M_i$ . Но это означает, что  $\sup_{x \in \tilde{X}_i^0} f(x) \leq \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i$ , т. е.

$$\inf_{X \in M_i} (\sup_{x \in X} f(x)) \leq \sup_{x \in \tilde{X}_i^0} f(x) \leq \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i,$$

что невозможно в силу определения числа  $\lambda_i$ . Лемма доказана. ■

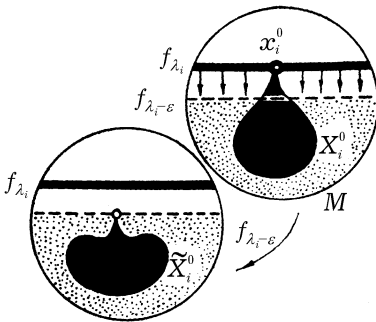


Рис. 54

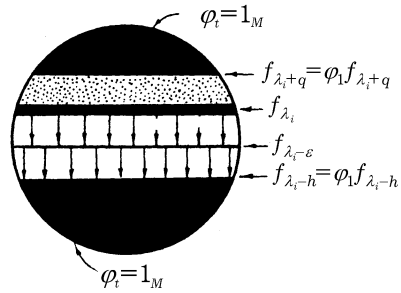


Рис. 55

**Лемма 5.11.** *Предположим, что в последовательности  $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_N$  есть совпадающие числа; пусть  $\lambda_i = \lambda_{i+q}$ , где  $q > 0$ . Пусть  $K$  — множество всех критических точек функции  $f$  на поверхности  $f_{\lambda_i}$ . Тогда  $\text{cat}_M K \geq q + 1$ .*

*Доказательство.*

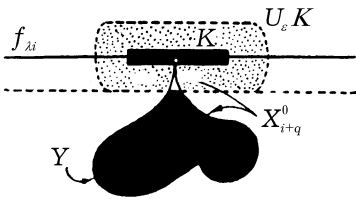


Рис. 56

Напомним, что в рамках указанной в п. 3 аналогии настоящая лемма воспроизводит алгебраическое утверждение о появлении целого подпространства собственных векторов, отвечающих кратному собственному значению формы  $B$ . Так как  $K$ , очевидно, замкнуто в  $M$ , то существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\text{cat}_M K = \text{cat}_M U_\varepsilon K$  в силу леммы 5.5.

Допустим противное:  $\text{cat}_M K \leq q$ . Рассмотрим последовательность классов  $M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq \dots \supseteq M_{i+q}$ . Пусть  $X_{i+q}^0 \in M_{i+q}$  — замкнутое подмножество такое, что  $\lambda_i = \lambda_{i+q} = \sup_{x \in X_{i+q}^0} f(x)$ . Построим новое замкнутое множество  $Y = \overline{X_{i+q}^0 \setminus (X_{i+q}^0 \cap K)}$  (рис. 56). Имеем

$$\begin{aligned} \text{cat}_M Y &\geq \text{cat}_M X_{i+q}^0 - \text{cat}_M X_{i+q}^0 \cap U_\varepsilon K \geq \text{cat}_M X_{i+q}^0 - \\ &- \text{cat}_M U_\varepsilon K = \text{cat}_M X_{i+q}^0 - \text{cat}_M K \geq i + q - q = i. \end{aligned}$$

Итак,  $\text{cat}_M Y \geq i$ , т. е.  $Y \in M_i$ . Далее

$$\lambda_i = \lambda_{i+q} = \sup_{x \in X_{i+q}^0} f(x) \geq \sup_{x \in Y} f(x) \lambda_i = \lambda_{i+q} = \sup_{x \in X_{i+q}^0} f(x).$$

Отсюда следует, что  $\sup_{x \in X_{i+q}^0} f(x) = \lambda_i$ , а потому множество  $Y$  может играть роль компакта  $X_i^0$  в классе  $M_i$ . В то же время  $Y \cap K = \emptyset$ , что противоречит лемме 5.10, в силу которой в  $Y$  должна быть по крайней мере одна критическая точка функции  $f$ , поскольку  $Y \cap f_{\lambda_i} \neq \emptyset$ . Лемма доказана. ■

Теперь мы уже можем перейти к доказательству теоремы 5.1.

Рассмотрим последовательность классов  $M_0 = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_N$ . Предположим сначала, что  $\lambda_0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$  (т. е. что совпадающих чисел нет при  $i \geq 1$ ). Тогда из леммы 5.10 следует, что на каждой поверхности  $f_{\lambda_i}$  есть хотя бы одна критическая точка функции, а потому число различных критических точек не меньше, чем число различных критических поверхностей уровня, которое, очевидно, не меньше  $N = \text{cat } M$ . Итак, в случае «общего положения» теорема доказана. Предположим теперь, что среди чисел  $\lambda_i$  есть совпадающие, например  $\lambda_i = \lambda_{i+q}$ . Сколько различных критических точек можно тогда выбрать на поверхности  $f_{\lambda_i}$ ? Из леммы 5.11 получаем, что  $\text{cat}_M K \geq i$ , где  $K$  — множество критических точек на поверхности  $f_{\lambda_i}$ . Но это означает, что в  $K$  можно выбрать по крайней мере  $q + 1$  различных точек. В самом деле,  $K = \bigcup_{j=1}^{q+1} K_j$ , где каждое  $K_j$  стягивается по  $M$  в точку, по этому достаточно указать по одной точке в каждом  $K_j$ . Итак, «однократное» значение  $\lambda_i$ , т. е. такое, что  $\lambda_{i-1} < \lambda_i < \lambda_{i+1}$ , дает вклад в виде по крайней мере одной критической точки, а каждое « $(q + 1)$ -кратное» значение  $\lambda_i$  т. е. такое, что  $\lambda_{i-1} < \lambda_i = \dots = \lambda_q < \lambda_{i+q+1}$ , дает вклад в виде по крайней мере  $q + 1$  различных критических точек. Двигаясь вверх в порядке возрастания  $\lambda_i$ , мы и получаем утверждение теоремы.

## 5. Примеры вычисления категории

Мы получили оценку снизу на число критических (бифуркационных) точек гладкой функции на  $M$ . Эта оценка выражена в терминах некоторого топологического инварианта многообразия  $M$  (очевидно, что гомеоморфные пространства имеют одинаковую категорию). Является ли эта оценка наилучшей в общем случае, т. е. существуют ли

примеры таких функций на  $M$ , для которых эта оценка достигалась бы? Такие примеры существуют.

**Утверждение 5.1.** Категория сферы  $S^n$  равна двум. Категория двумерного гладкого замкнутого компактного многообразия, отличного от сферы, равна трем. Наименьшее число критических точек гладкой функции на сфере  $S^n$  равно двум (и равно категории сферы). Наименьшее число критических точек гладкой функции на  $M_{g \geq 1}^2$  или  $M_{\mu \geq 1}^n$  равно трем (и равно категории этого двумерного многообразия).

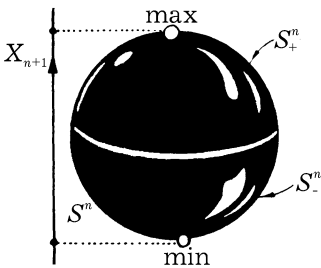


Рис. 57

*Доказательство.*

Для сферы  $S^n$  утверждение очевидно, поскольку  $S^n = S_+^n \cup S_-^n$ , где  $S_{\pm}^n$  — две замкнутые полусферы, а в качестве функции  $f$  можно взять стандартную функцию высоты (рис. 57). С другой стороны,  $\text{cat } S^n \neq 1$ , так как  $S^n$  не стягивается по себе в точку (этому препятствуют нетривиальные гомотопии сферы). В случае  $M_g^2 > 0$  и  $M_{\mu}^2 > 0$  мы доказали в п. 4, что на этих многообразиях существует гладкая функция с тремя критическими точками. Осталось проверить, что в этом случае  $\text{cat } M^2 = 3$ .

Индексы  $g > 0$  и  $\mu > 0$  мы опустим для сокращения записи. Ясно, что  $\text{cat } M^2 > 2$ , в противном случае многообразие было бы гомеоморфно сфере. Предъявим теперь разбиение  $M^2$  в объединение трех замкнутых стягиваемых подмножеств. Для этого достаточно рассмотреть уже известное нам простейшее клеточное разбиение  $M^2$ . В самом деле  $M^2 = \sigma^0 \cup \left( \bigcup_{i=1}^r \sigma_i^1 \right) \cup \sigma^2$ , т.е. к букету окружностей  $\bigvee_{i=1}^r S_i^1$  приклеена одна двумерная клетка  $\sigma^2$ , моделирующая фундаментальный многоугольник  $W$ . Пусть  $U_{\varepsilon}$  — достаточно малая  $\varepsilon$ -окрестность одномерного остова (букета)  $\bigvee_{i=1}^r S_i^1$  в многообразии  $M^2$  и пусть  $D^2 = M^2 \setminus U_{\varepsilon}$  — замкнутый диск (рис. 58). Тогда  $M^2$  представляется в виде  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , где  $A_1 = D^2$  (стягивается по себе в точку), а множества  $A_2$  и  $A_3$  показаны на рис. 59. Здесь  $A_2 = U_{\varepsilon} \cap R_{\alpha}$ , где  $R_{\alpha}$  — диск радиуса  $\alpha$  с центром в точке  $\sigma^0$  (число  $\alpha$  достаточно мало),  $A_3 = \overline{U_{\varepsilon} \setminus A_2}$ ,  $U_{\varepsilon} = A_2 \cup A_3$ . При этом  $A_2$  стягивается по себе в точку, а  $A_3$  стягивается по себе к набору

из  $r$  точек, а потому (в силу связности  $M^2$ ) стягивается в точку по  $M^2$ . Утверждение доказано. ■

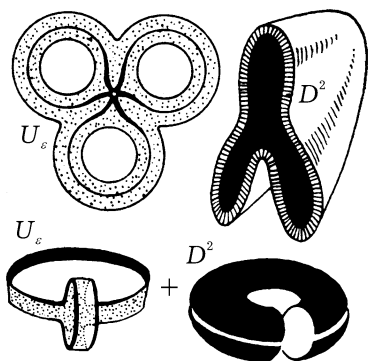


Рис. 58

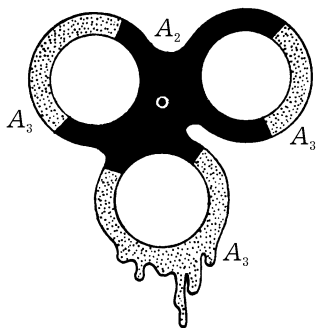


Рис. 59

В то же время следует отметить, что категория — трудно вычисляемый инвариант многообразия, какие-либо достаточно эффективные алгебраические способы его вычисления (наподобие спектральной последовательности для (ко)гомологий) отсутствуют. Получить оценку сверху на категорию многообразия обычно не представляет труда в каждой конкретной задаче: для этого достаточно предъявить какое-то одно покрытие  $M$  стягиваемыми множествами. В качестве задачи сформулируем следующую теорему: категория  $n$ -мерного гладкого многообразия  $M^n$  всегда не превышает  $n + 1$ .

Значительно труднее получить оценку снизу. Мы ограничимся здесь описанием только одного способа, основанного на понятии когомологической длины многообразия.

**Определение 5.2.** Пусть  $H^*(M, A)$  — кольцо когомологий многообразия  $M$ , где  $A = \mathbb{Z}$  или  $\mathbb{R}$ , если  $M$  ориентируемо, и  $A = \mathbb{Z}_2$ , если  $M$  неориентируемо. Рассмотрим все такие целые числа  $p$ , для которых в кольце  $H^*(M, A)$  существуют элементы  $a_1, \dots, a_p$ ,  $\dim a_i > 0$ ;  $1 \leq i \leq p$ , произведение которых в смысле умножения в кольце когомологий  $a_1 \cdot \dots \cdot a_p$  отлично от нуля в  $H^*(M, A)$ . Когомологической длиной многообразия называется максимальное из таких чисел  $p$ .

**Теорема 5.2.** Если  $k$  — когомологическая длина многообразия  $M$ , то  $\text{cat } M \geq k + 1$ .

Доказательство будет дано ниже после того, как мы познакомимся с двойственностью Пуанкаре. Рассмотрим здесь лишь следствия из этой теоремы, позволяющие вычислять категорию конкретных пространств.

**Предложение 5.1.** Имеет место равенство  $\text{cat } \mathbb{R}P^n = n + 1$ .

*Доказательство.*

Сначала докажем оценку сверху:  $\text{cat } \mathbb{R}P^n \leq n + 1$ . Выше мы предъявили стандартное представление  $\mathbb{R}P^n$  в виде клеточного комплекса. Отсюда получаем разбиение  $\mathbb{R}P^1 = \bigcup_{i=1}^{n+1} D_i^n$ , где  $D_i^n$  — открытые  $n$ -мерные диски, определяемые так:  $D_i^n = \{\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}), \lambda \neq 0, x_i \neq 0\}$ , где  $x_i$  — однородные координаты на  $\mathbb{R}P^n$  (в [2] см. явные формулы, задающие гомеоморфизм между  $D_i^n$  и стандартным открытым диском  $D^n$ ). Так как  $\{D_i^n\}$  — конечное открытое покрытие, то в каждое множество  $D_i^n$  можно вписать меньший замкнутый диск  $B_i^n$ , объединение которых по всем  $i$  будет по-прежнему покрывать  $\mathbb{R}P^n$ . Так как каждый диск  $B_i^n$  стягивается по себе в точку, то мы доказали искомую оценку сверху. Обратное докажем, что  $\text{cat } \mathbb{R}P^n \geq n + 1$ . В силу теоремы 5.2 достаточно доказать, что когомологическая длина  $\mathbb{R}P^n$  (с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ , чтобы сразу охватить и ориентируемый и неориентируемый случаи) равна  $n$ . Известно, что  $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[e]/(e^{n+1})$ , где  $\deg(e) = 1$ . Таким образом, произведение  $e^n = e \cdot \dots \cdot e$  ( $n$  раз) отлично от нуля, что и требовалось доказать. ■

**Лемма 5.12.** Если  $\text{cat } X \geq k$ , то  $\text{cat } X \vee S^n = \text{cat } X$ , где  $X \vee S^n$  — букет пространства  $X$  и сферы  $S^n$ ,  $n > 0$ .

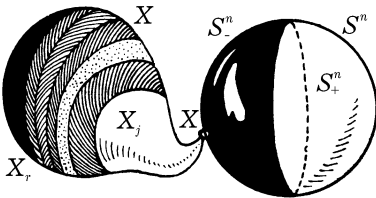


Рис. 60

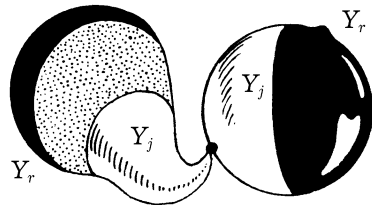


Рис. 61

*Доказательство.*

Пусть  $\text{cat } X = k$  и  $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ , где каждое множество  $X_i$ , стягивается по  $X$  в точку. Пусть  $x \in X$  — точка, в которой произведена склейка  $X \vee S^n$ . Представим сферу в виде объединения двух полусфер  $S_+^n$  и  $S_-^n$ , где  $x \in S_-^n$  и  $x \notin S_+^n$  (рис. 60). Пусть  $X_j$  — такое подмножество, что  $x \in X_j$ . Положим  $Y_i = X_j$  где  $i \neq j$  и  $i \neq r$ , а  $r \neq j$ . Наконец, положим  $Y_j = X_j \cup S_-^n$ ;  $Y_r = X_r \cup S_+^n$  (рис. 61). В частности,  $Y_r$  может оказаться несвязным. Итак,  $X \vee S^n = \bigcup_{s=1}^k Y_s$ , где каждое множество  $Y_s$  стягивается по  $X \vee S^n$  в точку. Тем самым  $\text{cat } X \vee S^n = \text{cat } X$ , что и требовалось. ■

Совершенно аналогично доказывается следующее утверждение:  $\text{cat } X \vee Y = \max(\text{cat } X, \text{cat } Y)$  для любых пространств.

**Предложение 5.2.** Если  $T^n$  — тор, то  $\text{cat } T^n = n + 1$ .

*Доказательство.*

Поскольку тор  $T^n$  является прямым произведением окружностей, то  $H^*(T^n, \mathbb{Z}) = \wedge(x_1, \dots, x_n)$  (внешняя алгебра от одномерных образующих  $x_1, \dots, x_n$ ). Следовательно, произведение  $x_1 \dots x_n$  отлично от нуля, и  $\text{cat } T^n \geq n + 1$ . Докажем, что  $\text{cat } T^n \leq n + 1$ . Так как  $T^n = S^1 \times T^{n-1}$ , то  $T^n$  представляется в виде  $(S^1 \vee T^{n-1}) \cup \sigma^n$  ( $n$ -мерный аналог рис. 58), следовательно,  $\text{cat } T^n = \text{cat}(S^1 \vee T^{n-1}) \cup \sigma^n \leq \text{cat}(S^1 \vee T^{n-1}) + 1$ . Так как  $\text{cat } T^{n-1} \vee S^1 = \text{cat } T^{n-1}$  и так как  $\text{cat } T^2 = 3$  (см. выше случай двумерных многообразия), то  $\text{cat } T^{n-1} \leq n + 1$ . ■

**Предложение 5.3.** Пусть  $p: E \xrightarrow{F} B$  — локально тривиальное расслоение. Тогда  $\text{cat } E \leq \text{cat}_E F \cdot \text{cat } B$ , где  $F \subset E$  — слой расслоения.

*Доказательство.*

Верно даже более общее утверждение: если  $X \subset B$  — замкнутое подмножество в базе и  $p^{-1}X \subset E$  — его полный прообраз, то  $\text{cat}_E p^{-1}X \leq \text{cat}_E F \cdot \text{cat}_B X$ . Положив  $X = B$ , мы и получим искомое утверждение. Рассмотрим сначала частный случай:  $\text{cat}_B X = 1$ . Мы должны проверить,

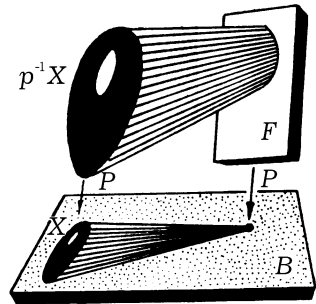


Рис. 62

следовательно, неравенство  $\text{cat}_E p^{-1}X \leq \text{cat}_E F$ . Стягивая  $X$  по базе  $B$  в точку и накрывая эту деформацию непрерывной деформацией прообраза  $p^{-1}X$  по пространству  $E$  в слой  $F$  (существование такой накрывающей гомотопии см., например, в [1, гл. 5]), получаем из леммы 5.4, что  $\text{cat}_E p^{-1}X \leq \text{cat}_E F$ , что и требовалось (рис. 62).

Перейдем к общему случаю, применяя индукцию. Пусть  $\text{cat}_B X = k$ , т. е.  $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ , где каждое  $X_i$  стягивается по  $B$  в точку. Положим  $Y = \bigcup_{i=1}^{k-1} X_i$ ,  $Z = X_k$ , тогда  $X = Y \cup Z$ , где  $\text{cat}_B Y \leq k-1$ ,  $\text{cat}_B Z = 1$ .

Требуется доказать, что  $\text{cat}_E F \cdot \text{cat}_B Y \cup Z \geq \text{cat}_E p^{-1}(Y \cup Z)$ . Имеем  $\text{cat}_E p^{-1}(Y \cup Z) = \text{cat}_E p^{-1}Y \cup p^{-1}Z \leq \text{cat}_E p^{-1}Y + \text{cat}_E p^{-1}Z$ . Искомое неравенство получится из неравенства  $\text{cat}_E p^{-1}Y + \text{cat}_E p^{-1}Z \leq \text{cat}_E F \cdot \text{cat}_B Y \cup Z = k \cdot \text{cat}_E F$ . Так как  $\text{cat}_E p^{-1}Z \leq \text{cat}_E F$  ( $Z$  стягивается по  $B$  в точку), то достаточно доказать неравенство  $\text{cat}_E p^{-1}Y + \text{cat}_E F \leq k \cdot \text{cat}_E F$ , т. е.  $\text{cat}_E p^{-1}Y \leq (k-1) \text{cat}_E F$ . Но это неравенство следует из более сильного утверждения:  $\text{cat}_E p^{-1}Y \leq \text{cat}_E F \cdot \text{cat}_B Y$ , так как  $\text{cat}_B Y \leq k-1$ . Последнее же утверждение имеет место в силу предположения индукции, ведущейся по  $\text{cat}_B X$ . Напомним, что первый шаг индукции:  $\text{cat}_B X$  был уже разобран выше. Утверждение полностью доказано. ■

Полученная нами оценка на категорию пространства расслоения является в некотором смысле точной, т. е. существуют такие расслоения, для которых это неравенство превращается в равенство, т. е.  $\text{cat} E = \text{cat}_E F \cdot \text{cat} B$ . При этом среди таких расслоений есть нетривиальные. Например, пусть  $p: S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$  — расслоение Хопфа. Тогда имеем  $\text{cat} S^3 = \text{cat} S^2 = 2$ ,  $\text{cat}_{S^3} S^1 = 1$  (так как слой  $S^1$  стягивается по сфере  $S^3$  в точку), т. е.  $2 = 1 \cdot 2$ .

## § 6. Правильные функции Морса и бордизмы

### 1. Бордизмы

Настоящий параграф содержит результаты, играющие исключительно важную роль в изучении топологии многообразий. В частности, здесь мы докажем существование на любом компактном многообразии так называемых «правильных функций Морса»  $f$ , т. е. таких, что  $f(x) \geq f(y)$ , где  $x$  и  $y$  — критические точки и  $\text{ind}(x) \geq \text{ind}(y)$ . Из

существования таких функций мы выведем затем некоторые важные топологические следствия. Основным объектом изучения в этом параграфе будут ориентируемые гладкие компактные многообразия  $W^n$  с краем  $\partial W^n$ , являющимся несвязным объединением двух ориентируемых замкнутых, т. е. не имеющих края (но не обязательно связных) многообразий  $V_0^{n-1}$  и  $V_1^{n-1}$ . При этом мы будем считать, что с учетом индуцированной ориентации  $\partial W = V_0 \cup (-V_1)$ , где знак « $-$ » указывает ориентацию, противоположную фиксированной (рис. 63). Многообразия  $V_0$  и  $V_1$  называются иногда в таком случае бордантными, а многообразие  $W$  — бордизмом, или просто пленкой. Иногда будем использовать обозначение  $(W, V_0, V_1)$ . Так, например, любое двумерное замкнутое ориентируемое многообразие  $M_g^2$  бордантно двумерной сфере, а потому все такие многообразия бордантны друг другу.

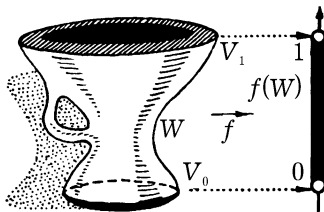


Рис. 63

Для доказательства достаточно рассмотреть стандартное вложение  $M_g^2$  в  $\mathbb{R}^3$ , рассмотреть затем трехмерное многообразие, ограниченное  $M_g^2$  в  $\mathbb{R}^3$  (т. е. заполнение  $M$ ) и выбросить из него маленький шар.

Особый интерес для нас будут представлять функции Морса на  $W$ . При этом мы будем считать, что функция  $f$  удовлетворяет следующим требованиям (см. рис. 63):  $f|_{V_0} = 0$ ,  $f|_{V_1} = 1$ ,  $0 \leq f \leq 1$  на  $W$ . Такие функции Морса всегда существуют (см., например, [6]).

**Определение 6.1.** Будем говорить, что  $f$  является *функцией Морса* на  $W$ ,  $0 \leq f \leq 1$ , если  $f|_{V_0} = 0$ ,  $f|_{V_1} = 1$ , и на крае  $\partial W$  нет критических точек функции  $f$ , т. е. они расположены внутри пленки.

Как и в случае замкнутых многообразий имеет место теорема: множество функций Морса всюду плотно в пространстве всех гладких функции  $g$  на  $W$  таких, что  $0 \leq g \leq 1$ ,  $g|_{V_0} = 0$ ,  $g|_{V_1} = 1$ .

## 2. Разложение бордизма в композицию элементарных бордизмов

Поскольку мы рассматриваем пары  $(W, f)$ , то естественно поставить вопрос: какова простейшая структура такой пары?

**Определение 6.2.** Бордизм  $(W, f)$  назовем *элементарным*, если функция Морса  $f$  на  $W$  имеет только одну критическую точку.

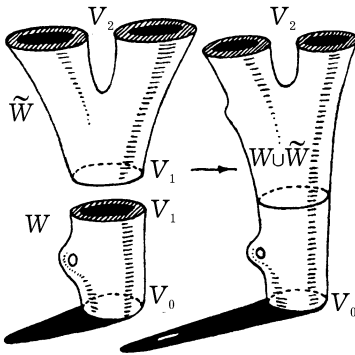


Рис. 64

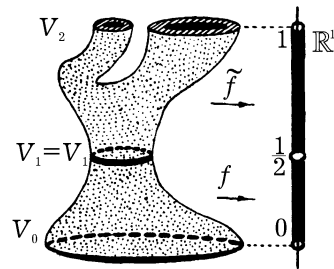


Рис. 65

Пусть даны два бордизма  $(W, V_0, V_1)$  и  $(\tilde{W}, V_1, V_2)$ ; тогда можно образовать новый бордизм  $W \circ \tilde{W} = (W \cup \tilde{W}, V_0, V_2)$ , склеив край  $V_1$  на пленке  $W$  с краем  $V_1$  на пленке  $\tilde{W}$  (рис. 64). Для склейки можно воспользоваться любым фиксированным диффеоморфизмом между  $V_1 \subset \partial W$  и  $V_1 \subset \partial \tilde{W}$ . Конечно, при этом нужно проследить за тем, чтобы в месте склейки не возникли «углы», однако их появления можно избежать, выполняя операции «сглаживания» наподобие того, как сглаживаются «углы» многообразия, возникающие при приклейке к нему ручки (см. выше). Будем говорить, что бордизм  $W \circ \tilde{W}$  получен композицией бордизмов  $W$  и  $\tilde{W}$ . Ясно также, что если  $f$  и  $\tilde{f}$  — функции Морса на  $W$  и  $\tilde{W}$  соответственно, то склейка  $W \circ \tilde{W}$  позволяет определить новую функцию Морса на пленке  $W \circ \tilde{W}$ , получающуюся склейкой этих функций (рис. 65).

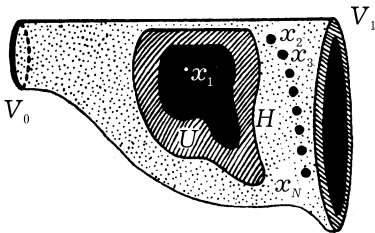


Рис. 66

**Предложение 6.1.** Пусть  $(W, f)$  — произвольный бордизм с функцией Морса на нем. Тогда он допускает представление в виде композиции элементарных бордизмов  $W = W_1 \circ \dots \circ W_N$ , причем  $(W, f) = (W_1, g_1) \circ \dots \circ (W_n, g_n)$ , где  $g_i$  — ограничения на  $W_i$  функции Морса  $g$ , заданной на всем  $W$ , и функция  $g$  может быть выбрана сколь угодно близкой к исходной функции  $f$ .

Доказательство сразу вытекает из следующей леммы.

**Лемма 6.1.** Пусть  $(W, f)$  — бордизм с функцией Морса. Пусть  $x_1, \dots, x_N$  — критические точки  $f$ . Тогда функцию Морса  $f$  можно сколь угодно близко аппроксимировать функцией Морса  $g$  с теми же критическими точками и такой, что  $g(x_i) \neq g(x_j)$  при  $i \neq j$ .

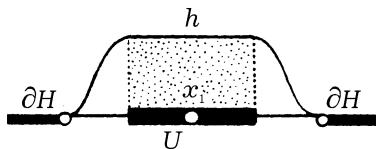


Рис. 67

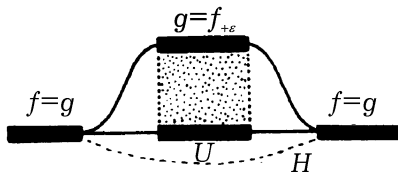


Рис. 68

*Доказательство леммы.*

Фиксируем точку  $x_1$  и окружим ее двумя открытыми окрестностями  $U$  и  $H$  такими, что  $x_1 \in U \subset \bar{U} \subset H$  и  $x_j \notin \bar{H}$  при  $j \neq 1$ . В силу изолированности критических точек такие окрестности существуют (рис. 66). Построим затем на  $W$  гладкую функцию  $h$  такую, что  $h \equiv 1$  в окрестности  $U$  и  $h \equiv 0$  вне окрестности  $H$  (рис. 67). После этого рассмотрим новую функцию  $f_0 = f + \varepsilon_1 h$ , где число  $\varepsilon_1 > 0$  выбрано так, чтобы  $0 \leq f_0 \leq 1$  на  $W$  и чтобы  $f_0(x_1) \neq f_0(x_j)$  при  $j \neq 1$ . Рассмотрим «кольцо»  $H \setminus \bar{U} = K$  и будем считать, что на  $W$  задана некоторая риманова метрика (существующая ввиду компактности  $W$ ). Ясно, что на замыкании  $K$  модуль градиента  $f$  отделен снизу от нуля, т.е. существует постоянная  $c$  такая, что  $0 < c \leq |\text{grad } f|$ , причем можно также считать, что на  $K$  имеем  $|\text{grad } f| \leq c' < \infty$ . Рассмотрим  $\varepsilon$  такое, что  $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_1, c/c')$ . Окончательно в качестве  $g$  возьмем функцию  $g = f + \varepsilon h$  (рис. 68). Мы утверждаем, что  $g$  — функция Морса с теми же критическими точками, что и  $f$ . В самом деле, если  $\text{grad } g(x') = 0$ , где  $x' \in K$ , то  $\text{grad } f(x') + \varepsilon \text{grad } h(x') = 0$ , откуда  $c \leq |\text{grad } f(x')| = \varepsilon |\text{grad } h(x')| < c$ . Полученное противоречие доказывает лемму. ■

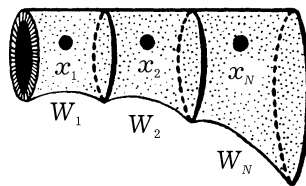


Рис. 69

Таким образом, если дан бордизм  $W$  с функцией Морса  $f$ , то малым

возмущением функции  $f$  можно добиться того, что все ее критические точки будут расположены на разных критических уровнях (рис. 69).

### 3. Градиентно-подобные поля и сепаратрисные диски

Пусть  $\xi$  — векторное поле на  $W$  и  $f$  — гладкая функция. Через  $\xi(f)$  будем обозначать производную функции  $f$  вдоль поля  $\xi$ .

**Определение 6.3.** Гладкое векторное поле  $\xi$  на  $W$  называется *градиентно-подобным* для функции  $f$ , если: 1)  $\xi(f) > 0$  на множестве  $W \setminus (y_1 \cup \dots \cup y_N)$ , где  $y_1, \dots, y_N$  — критические точки функции  $f$ , 2) для любой критической точки  $y_i$  существует открытая окрестность  $U_i$  такая, что в любой системе координат, в которой

$$f(x)|_{U_i} = f(y_i) - \sum_{j=1}^{\lambda} x_j^2 + \sum_{r=\lambda+1}^n x_r^2,$$

поле  $\xi$  имеет вид  $\xi(x) = (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ .

Для любой функции Морса  $f$  на  $W$  такие поля, конечно, существуют. Достаточно, например, в качестве  $\xi$  взять поле  $\text{grad } f$ . Отметим, что если на пленке  $W$  существует функция Морса  $f$  без критических точек, то многообразие  $W$  диффеоморфно прямому произведению  $V_0 \times I$ , в частности,  $V_0$  и  $V_1$  гомеоморфны. Такие бордизмы иногда называются тривиальными (цилиндр). Для доказательства достаточно рассмотреть слоение  $W$  интегральными траекториями градиентно-подобного для функции  $f$  поля  $\xi$ . Пусть теперь  $x_0 \in W$  — критическая точка индекса  $\lambda$  для  $f$  на  $W$  и  $\xi$  — градиентно-подобное поле для  $f$ .

**Определение 6.4.** *Сепаратрисной диаграммой* критической точки  $x_0 \in W$  называется совокупность всех интегральных траекторий поля  $\xi$ , входящих в точку  $x_0$  или выходящих из нее.

Условная схема этой диаграммы показана на рис. 70. Входящие интегральные траектории заполняют  $\lambda$ -мерный диск  $D^\lambda$ , соответствующий локальным координатам  $x_1, \dots, x_\lambda$ , а исходящие траектории заполняют диск  $D^{n-\lambda}$  соответствующий остальным координатам и трансверсальный диску  $D^\lambda$  в точке их пересечения  $x_0$ . Отметим, что точка  $x_0$  — единственная точка пересечения этих дисков. Если моделировать векторное поле  $\xi$  как поле скоростей жидкости, текущей по пленке  $W$ , то вдоль диска  $D^\lambda$  жидкость стекает в точку  $x_0$ , а вдоль  $D^{n-\lambda}$  жидкость вытекает из  $x_0$ . Рассмотрим теперь две сферы, получающиеся, если мы пересечем сепаратрисные диски с дву-

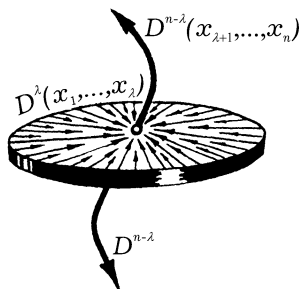


Рис. 70

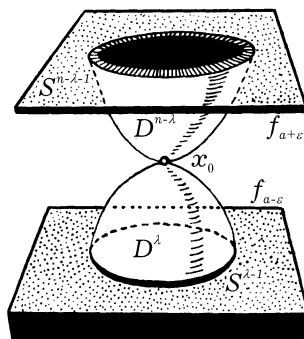


Рис. 71

мя поверхностями уровня функции — выше и ниже критической точки. Диск  $D^\lambda$ , расположенный в области меньших значений функции  $f$  (т.е. в области  $f(x) \leq f(x_0)$ ), иногда называется левосторонним, а диск  $D^{n-\lambda}$ , расположенный в области больших значений, — правосторонним. Пусть  $f(x_0) = a$ . Рассмотрим теперь две сферы

$$S^{\lambda-1} = D^\lambda \cap f_{a-\varepsilon} \text{ и } S^{n-\lambda-1} = D^{n-\lambda} \cap f_{a+\varepsilon},$$

где  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число. Можно считать, что в окрестности  $U(x_0)$  имеем  $S^{\lambda-1} = \partial D^\lambda$ ,  $S^{n-\lambda-1} = \partial D^{n-\lambda-1}$  (рис. 71). Рассмотрим продолжения интегральных траекторий поля за пределы слоя  $a - \varepsilon \leq f \leq a + \varepsilon$ . Это порождает движение левосторонней и правосторонней сфер, которые начинают двигаться по пленке  $W$ ; при этом диски  $D^\lambda$  и  $D^{n-\lambda}$  расширяются и движутся вдоль интегральных траекторий. Два правосторонних (или два левосторонних) диска могут пересечься при таком продолжении только в некоторой критической точке функции  $f$  (вне критических точек интегральные траектории не пересекаются). Итак, мы инвариантно связали с каждой критической точкой пару дисков  $D^\lambda$  и  $D^{n-\lambda}$ . Оказывается, взаимодействие этих дисков, исходящих из разных критических точек, в значительной степени определяет топологию пленки  $W$ .

#### 4. Перестройки поверхностей уровня гладкой функции

Пусть  $V^{n-1}$  — гладкое компактное многообразие и  $S^{\lambda-1} \subset V^{n-1}$  — некоторое гладкое вложение сферы  $S^{\lambda-1}$  в  $V^{n-1}$  такое, что некоторая достаточно малая трубчатая окрестность  $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$  этой сферы

в  $V^{n-1}$  диффеоморфна прямому произведению  $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ . Ясно, что  $\partial(S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$  (см. рис. 21). Рассмотрим многообразиие  $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$  с краем  $\partial(D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}) = S^{\lambda-1} \times S^{n-\lambda-1}$ . Построим новое многообразие  $\tilde{V}^{n-1} = (V^{n-1} \setminus (S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda})) \cup \cup(S^{n-\lambda-1} \times D^\lambda)$ , т. е. выбросим из  $V^{n-1}$  трубчатую окрестность  $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$  и вклеим вместо нее  $S^{n-\lambda-1} \times D^\lambda$ . Другими словами, мы меняем местами сферу и диск в прямом произведении: многообразие  $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$  заменяется на  $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ . При этом мы использовали то, что оба эти многообразия имеют гомеоморфные края. Будем говорить, что  $\tilde{V}^{n-1}$  получено из  $V^{n-1}$  перестройкой Морса индекса  $\lambda$ . Рассмотрим простейшие примеры. Пусть  $n = 3$ ,  $\lambda = 1$ , тогда  $\lambda - 1 = 1$  (рис. 72). Здесь  $U_\varepsilon S^{\lambda-1} = D^2 \cup D^2 = S^0 \times D^2$ ,  $\partial(U_\varepsilon S^{\lambda-1}) = S^1 \times S^0$ ,  $D^\lambda \times S^{n-\lambda-1} = D^1 \times S^1$ ,  $\partial(D^1 \times S^1) = S^0 \times S^1$ . В результате этой перестройки индекса 1 к исходному двумерному многообразию  $V^2$  приклеивается «ручка» в смысле теории двумерных поверхностей, например из сферы получается тор.

**Задача.** Произвести перестройку индекса 2 для двумерного многообразия.

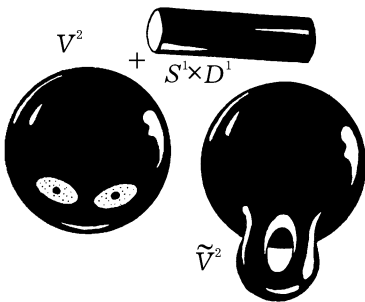


Рис. 72

Эта операция перестройки Морса индекса  $\lambda$  нам уже фактически известна: мы столкнулись с ней при изучении перестройки поверхностей уровня гладкой функции при переходе через критическую точку индекса  $\lambda$ .

**Предложение 6.2.** Пусть  $f$  — функция Морса на  $W$  и  $x_0$  — единственная критическая точка индекса  $\lambda$  в слое  $-\varepsilon \leq f \leq +\varepsilon$ . Тогда поверхность уровня  $f_{+\varepsilon}$  получается из поверхности уровня  $f_{-\varepsilon}$  перестройкой Морса индекса  $\lambda$ .

*Доказательство.*

Рассмотрим левосторонний сепаратрисный диск  $D^\lambda$ , выходящий из точки  $x_0$  (рис. 73). Этот диск пересекается по своей границе  $S^{\lambda-1}$  с поверхностью  $f_{-\varepsilon}$ . Ясно, что достаточно малая трубчатая окрестность  $U_\varepsilon S^{\lambda-1}$  этой сферы в поверхности  $f_{-\varepsilon} = V^{n-1}$  диффеоморфна прямому произведению  $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ . Тем самым мы попадаем в ситу-

ацию, когда можно выполнить перестройку Морса индекса  $\lambda$ . На рис. 73 отчетливо видно, что поверхность  $f_{+\varepsilon}$ , гладко деформируется посредством диффеоморфизма на перестроенное (по Морсу) новое многообразие  $\tilde{V}^{n-1}$ . Эту деформацию можно выполнить вдоль интегральных траекторий поля  $-\text{grad } f$ . Утверждение доказано. ■

Верно и обратное: если многообразие  $\tilde{V}^{n-1}$  получено из  $V^{n-1}$  перестройкой Морса индекса  $\lambda$ , то существуют пленка  $W^n$  с краями  $\tilde{V}^{n-1}$  и  $V^{n-1}$  и функция Морса  $f$  на  $W^n$  с единственной критической точкой индекса  $\lambda$  такие, что  $f_{-\varepsilon} = V^{n-1}$  и  $f_{+\varepsilon} = \tilde{V}^{n-1}$ . В самом деле, достаточно сослаться на доказанную нами теорему о построении функции Морса по заданному разбиению многообразия в сумму ручек (см. § 3). Таким образом, операция перестройки Морса индекса  $\lambda$  может моделироваться так: нужно рассмотреть исходное многообразие  $V^{n-1}$ , умножить его на отрезок, затем по вложению сферы  $S^{\lambda-1}$  в  $V^{n-1} \times 1$  с трубчатой окрестностью, являющейся прямым произведением, приклеить к  $W^n = V^{n-1} \times 1$  ручку  $H_\lambda^n$  индекса  $\lambda$  (см. § 3).

При этом мы получим новое многообразие  $\tilde{W}^n$ , край которого состоит из двух компонент: исходного многообразия  $V^{n-1}$  и нового  $\tilde{V}^{n-1}$ , получающегося из  $V^{n-1}$  перестройкой Морса индекса  $\lambda$ .

**Следствие 6.1.** Пусть  $(W, V_0, V_1)$  — бордизм с функцией Морса  $f$ , имеющей только одну критическую точку индекса  $\lambda$ . Тогда  $W$  стягивается на комплекс  $V_0 \cup D^\lambda$ , получающийся из  $V$  приклейкой клетки размерности  $\lambda$ . В частности,  $W$  гомотопически эквивалентно  $V_0 \cup \sigma^\lambda$ .

*Доказательство.*

Достаточно рассмотреть левосторонний сепаратрисный диск, исходящий из критической точки, и продолжить его до пересечения с  $V_0$ . Требуемое утверждение вытекает из предложения 6.2 (рис. 74).

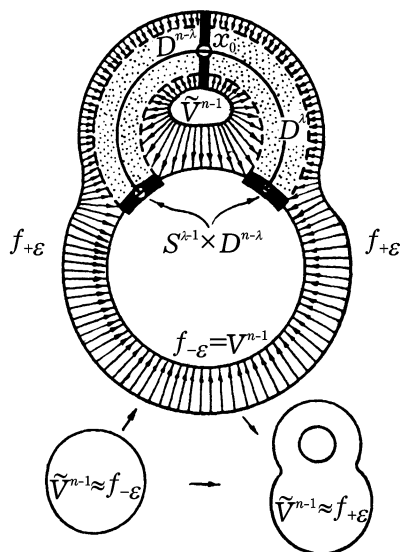


Рис. 73

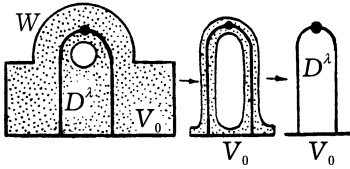


Рис. 74

## 5. Построение правильных функций Морса

Замечательным геометрическим фактом является существование на компактных многообразиях таких функций Морса, критические значения которых равны индексу критической точки, т. е.  $f(x) = \text{ind}(x)$  для любой критической

точки. Это означает, в частности, что критические точки упорядочены по мере возрастания их индекса, т. е. уровень  $f(x)$  критической точки  $x$  является возрастающей функцией индекса этой точки. Сначала докажем вспомогательное

**Предложение 6.3.** Пусть функция Морса  $f$  имеет только две критические точки  $x_0$  и  $y_0$  на бордизме  $(W, V_0, V_1)$ ; пусть  $a = f(x_0) < f(y_0) < b$ . Предположим, что для некоторого градиентно-подобного векторного поля  $\xi$  для функции  $f$  выполняется условие: сепаратрисные диаграммы критических точек  $x_0$  и  $y_0$  не пересекаются, т. е.  $(D^\lambda(x_0) \cup D^{n-\lambda}(x_0)) \cap (D^{\lambda'}(y_0) \cup D^{n-\lambda'}(y_0)) = \emptyset$ , где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — индексы  $x_0$  и  $y_0$  соответственно. Тогда на  $f$  существует новая функция Морса  $g$  такая, что: 1) поле  $\xi$  остается градиентно-подобным и для  $g$ , 2) функция  $g$  имеет те же критические точки, что и  $f$ , 3)  $g(x_0) > g(y_0)$ , т. е. критические уровни «меняются местами», 4) функция  $g$  совпадает с  $f$  в окрестности края  $\partial W = V_0 \cup V_1$  и равна  $f + \text{const}$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  и в некоторой окрестности точки  $y_0$ .

*Доказательство.*

На рис. 75 показано основное условие теоремы: сепаратрисные диаграммы двух критических точек не пересекаются. Для сокращения записи введем обозначения:  $X = D^\lambda(x_0) \cup D^{n-\lambda}(x_0)$ ,  $Y = D^{\lambda'}(x_0) \cup D^{n-\lambda'}(y_0)$ . Очевидно, что дополнение в  $W$  к  $X \cup Y$  является прямым произведением некоторого многообразия на отрезок, а именно  $W \setminus (X \cup Y) = (V_0 \setminus (V_0 \cap (X \cup Y))) \times I = (V_1 \setminus (V_1 \cap (X \cup Y))) \times I$ . Поскольку каждый сепаратрисный диск выходит на границу  $V_0$  (или  $V_1$ ) и пересекается с ней по своей сепаратрисной сфере, то указанное выше прямое произведение можно переписать еще и так:

$$\begin{aligned} W \setminus (X \cup Y) &= (V_0 \setminus (S^{\lambda-1}(x_0) \cup S^{\lambda'-1}(y_0))) \times I = \\ &= (V_1 \setminus (S^{n-\lambda-1}(x_0) \cup S^{n-\lambda'-1}(y_0))) \times I. \end{aligned}$$

В частности, многообразия

$$V_0 \setminus (S^{\lambda-1} \cup S^{\lambda'-1}) \quad \text{и} \quad V_1 \setminus (S^{n-\lambda-1} \cup S^{n-\lambda'-1})$$

диффеоморфны, и этот диффеоморфизм устанавливается вдоль интегральных траекторий поля  $\xi$ , проходящих мимо критических точек  $x_0$  и  $y_0$ . Рассмотрим на нижнем (левом) основании  $V_0$  гладкую функцию  $\alpha$  такую, что  $\alpha(x) = 0$  в достаточно малой окрестности множества  $V_0 \cap X$  и  $\alpha(x) = 1$  в достаточно малой окрестности множества  $V_0 \cap Y$ . Поскольку  $X \cap Y = \emptyset$ , то такая функция существует. Продолжим затем функцию  $\alpha$  с основания  $V_0$  до гладкой функции  $\alpha$  на всей пленке  $W$ . Для этого продолжим  $\alpha$ , заданную на  $V_0$ , постоянными значениями вдоль интегральных траекторий поля  $\xi$ . Очевидно, это определение корректно, так как интегральные траектории поля  $\xi$  вне множества  $X \cup Y$  не пересекаются.

В результате мы получим функцию  $\alpha$  на  $W$ , равную нулю в некоторой окрестности  $X$  и равную единице в некоторой окрестности  $Y$ . Рассмотрим теперь гладкую функцию  $z = h(s, r)$ , задаваемую графиком на рис. 76. На рис. 77 показана эволюция линий пересечения этого графика  $z = h(s, r)$  плоскостью  $r = t = \text{const}$  при изменении  $t$  от 0 до 1. Функцию  $h$  возьмем такую, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1)  $\frac{\partial h}{\partial s} > 0$  при всех  $(s, r)$  и  $h(s, r)$  возрастает от 0 до 1, когда  $s$  возрастает от 0 до 1;
- 2)  $h(a, 0) = b, h(b, 1) = a$ ;
- 3)  $\frac{\partial h(s, 0)}{\partial s} \equiv 1$  для всех  $s$  в окрестности  $a, \frac{\partial h(s, 1)}{\partial s} \equiv 1$  для всех  $s$  в окрестности  $b$  (рис. 78).

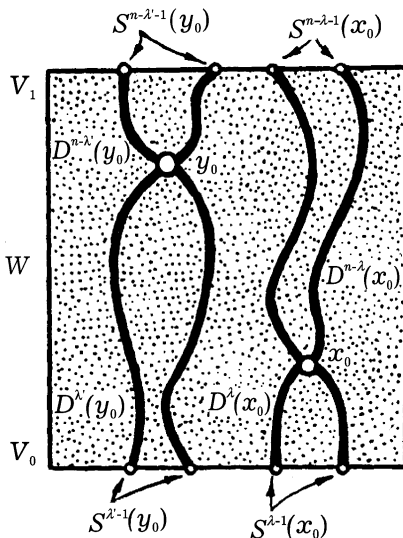


Рис. 75

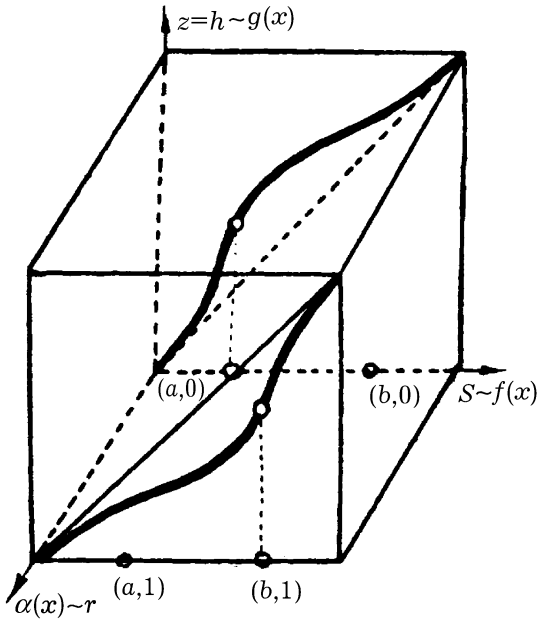


Рис. 76

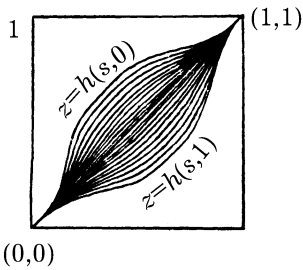


Рис. 77

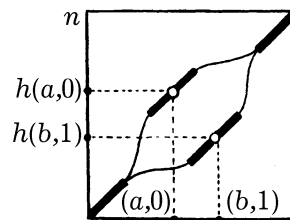


Рис. 78

Определим теперь искомую функцию  $g(x) = h(f(x), \alpha(x))$ . Тогда имеем  $g(x_0) = h(f(x_0), \alpha(x_0)) = h(a, 0) = b > a = h(b, 1) = h(f(y_0), \alpha(y_0)) = g(y_0)$ . Итак,  $g(x_0) > g(y_0)$ . Из условий 1 – 3, наложенных на функцию  $h$ , следует, что функция  $g$  удовлетворяет всем требованиям теоремы. Доказательство закончено. ■

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

**Теорема 6.1 (Теорема о перегруппировке критических точек).** Пусть функция Морса  $f$  имеет только две критические точки  $x_0, y_0$  на бордизме  $(W, V_0, V_1)$ ; пусть  $a = f(x_0) < f(y_0) = b$ . Предположим, что индекс точки  $x_0$  не меньше, чем индекс точки  $y_0$ . Тогда существует новая функция Морса  $g$  такая, что  $g$  имеет те же критические точки, что и  $f$ ,  $g(x_0) > g(y_0)$  и функция  $g$  удовлетворяет всем условиям, перечисленным в предложении 6.3.

*Доказательство.*

В том случае, когда  $X \cap Y = \emptyset$ , где  $X, Y$  — сепаратрисные диаграммы  $x_0$  и  $y_0$ , утверждение сразу следует из предложения 6.3. Рассмотрим теперь общий случай, когда  $X \cap Y \neq \emptyset$ . Оказывается, эта ситуация может быть редуцирована к случаю  $X \cap Y = \emptyset$ . Для этого фиксируем поверхность  $f_{1/2} = V$ , пусть  $\lambda$  — индекс  $x_0$ ,  $\lambda'$  — индекс  $y_0$ , тогда  $\lambda \geq \lambda'$ . Так как  $X \cap Y \neq \emptyset$ , то правосторонняя и левосторонняя сепаратрисные сферы точек  $x_0$  и  $y_0$  пересекаются на поверхности  $V$ , т. е.  $S^{n-\lambda-1}(x_0) \cap S^{\lambda'-1}(y_0) \neq \emptyset$  (рис. 79). В самом деле, если бы эти сферы не пересекались, то не пересекались бы и продолженные сепаратрисные диски, что означало бы, что  $X \cap Y = \emptyset$ . Так как значение  $1/2$  не является критическим для  $f$ , то поверхность  $V$  — гладкое  $(n-1)$ -мерное подмногообразие в  $W$ , а сферы  $S^{n-\lambda-1}$  и  $S^{\lambda'-1}$  — гладкие подмногообразия в  $V$ . Таким образом, мы получаем в  $V$  два подмногообразия, сумма размерностей которых строго меньше размерности  $V$ , равной  $n-1$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \dim S^{n-\lambda-1} + \dim S^{\lambda'-1} &= n - \lambda - 1 + \lambda' - 1 = \\ &= n - 2 - (\lambda - \lambda') < n - 1, \end{aligned}$$

так как  $\lambda - \lambda' \geq 0$ . Из теорем «общего положения», а именно из теоремы о трансверсальной регулярности [2, с. 483] следует, что существует сколь угодно малая гладкая деформация  $\varphi_t$  исходного вложения  $S^{\lambda'-1} \rightarrow V$  в новое близкое вложение, которое уже будет иметь пустое пересечение со сферой  $S^{n-\lambda-1}$ , причем все отображения  $\varphi_t$  также будут вложениями. Эту деформацию можно продолжить в малую окрестность поверхности  $V$  так, чтобы вне этой окрестности все  $\varphi_t$  были тождественными отображениями. Подвергнув затем этой деформации (определенной уже на всем  $W$ ) исходное поле  $\xi$ , мы получим новое поле  $\xi'$ , для которого се-

паратрисные диаграммы  $x_0$  и  $y_0$  уже не пересекаются. Следовательно, мы свели задачу к ситуации  $X \cap Y = \emptyset$  (рис. 80). Теорема доказана. ■

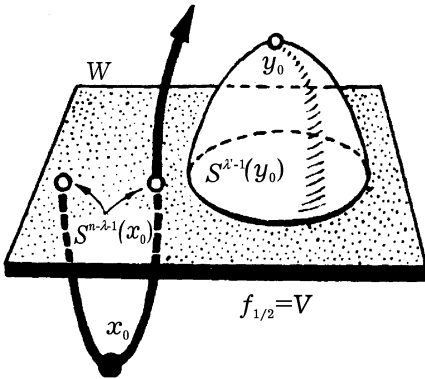


Рис. 79

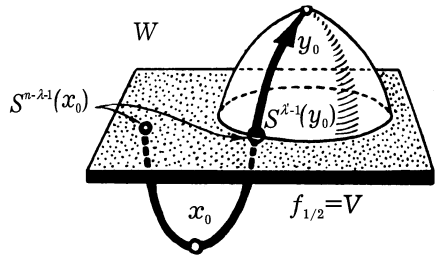


Рис. 80

**Теорема 6.2 (Теорема о существовании правильной функции Морса).** Пусть  $(W, V_0, V_1)$  — произвольный бордизм.

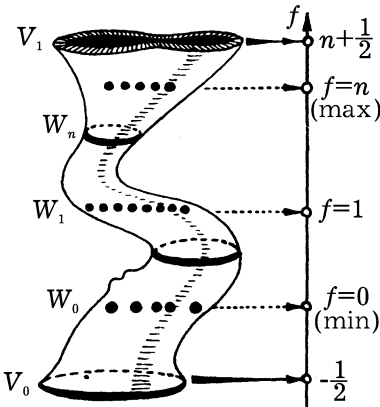


Рис. 81

Тогда на нем существует функция Морса  $f$  такая, что  $f|_{V_0} = -1/2$ ,  $f|_{V_1} = n + 1/2$ , где  $n = \dim W$ , и значение  $f$  в каждой критической точке равно индексу этой точки. В частности, все критические точки одного индекса  $\lambda$  расположены на одной поверхности уровня  $f_\lambda$ . Таким образом, исходный бордизм представляется в виде композиции элементарных бордизмов  $W = W_0 \circ \dots \circ W_n$ , на каждом из которых функция  $f$  имеет ровно одно критическое значение, равное  $\lambda$  для бордизма  $W_\lambda$  (рис. 81).

Таким образом, у правильной функции критические точки большого индекса расположены выше (правее при горизонтальном изображении бордизма), чем точки меньшего

индекса. Отметим, что такие функции уже не образуют плотного подмножества в пространстве всех гладких функций на  $W$ .

Доказательство сразу следует из теоремы 6.1. Если две критические точки имеют разные индексы, то мы «разводим» их на разные поверхности уровня, опуская точку меньшего индекса «ниже». Если же индексы этих точек совпадают, то мы останавливаем процесс перегруппировки этих точек в тот момент, когда они (см. доказательство теоремы 6.1) оказываются на одной поверхности уровня.

**Теорема 6.3.** Пусть  $M^n$  — гладкое компактное связное замкнутое многообразие. Тогда на  $M$  существует правильная функция Морса  $f$ ,  $0 \leq f \leq n$ , т. е. такая, что она имеет только один минимум (точка индекса 0), только один максимум (точка индекса  $n$ ), и каждая критическая точка индекса  $\lambda$  расположена на поверхности  $f_\lambda$  (рис. 82).

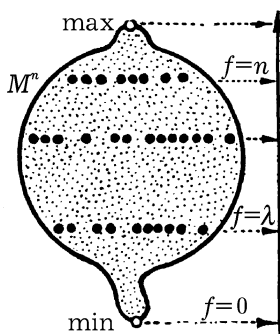


Рис. 82

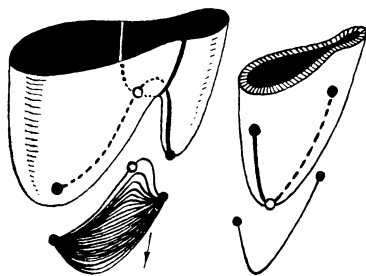


Рис. 83

*Доказательство.*

Пусть число локальных минимумов функции  $f$  больше единицы. Возьмем две точки минимума и соединим их кратчайшей геодезической  $\gamma$ . Пусть  $U_\varepsilon$  — достаточно малая трубчатая окрестность  $\gamma$ . Геодезическая содержит «точку перевала», т. е. критическую точку положительного индекса. Деформируем функцию  $f$  в окрестности  $U_\varepsilon$  так, как показано на рис. 83. При этом указанные особенности функции сливаются в один локальный минимум, причем новых минимумов при этом не появляется. Повторяя эту операцию, мы и получаем функцию с одним минимумом. Аналогичное рассуждение повторяется затем для

точек максимумов. Пусть  $x$  и  $x'$  — единственные точки минимума и максимума. Вырезая их малые окрестности, получаем бордизм с функцией Морса, у которой нет точек индекса 0 и  $n$ . После этого применяем теорему 6.2, перестраивая эту функцию, что и завершает доказательство. ■

В частности, на любом компактном многообразии существует функция Морса  $f$  такая, что у нее только один минимум, один максимум, на каждом критическом уровне расположена только одна критическая точка, причем  $f(x) > f(x')$ , если  $\text{ind}(x) > \text{ind}(x')$ . Рассмотрим некоторые простые следствия.

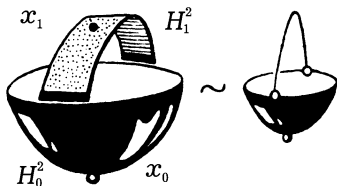


Рис. 84

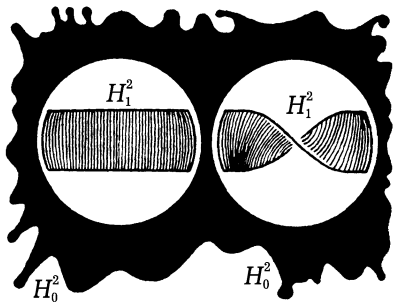


Рис. 85

Возьмем на двумерном гладком компактном замкнутом многообразии правильную функцию Морса  $f$ , пусть  $x_0$  — точка минимума,  $x_1, \dots, x_r$  — точки индекса 1,  $x_{r+1}$  — точка максимума, причем  $f(x_i) < f(x_{i+1})$ ,  $0 \leq i \leq r$ . Пусть  $0 \leq f \leq r+1$  и  $f(x_i) = i$ . Множество  $0 \leq f \leq \varepsilon$  при малых  $\varepsilon$  диффеоморфно двумерному диску, т. е. ручке  $H_0^2$ . При переходе через критическую точку  $x_1$  к этому диску приклеивается ручка индекса 1 (рис. 84). При этом в двумерном случае есть только два способа приклейки этой ручки, показанные на рис. 85. С гомотопической точки зрения результат получается один и тот же (приклеивается отрезок), однако с дифференциальной точки зрения получаются разные многообразия с краем: в первом случае — цилиндр  $S^1 \times D^1$ , во втором случае — лист Мебиуса, т. е. ориентируемая и неориентируемая поверхности. В частности, они не гомеоморфны. Продолжая этот процесс восстановления многообразия по правильной функции Морса и переходя через точки  $x_2, \dots, x_r$ , мы на каж-

дом шаге приклеиваем ручку. После перехода через последнюю точку индекса 1 получаем с гомотопической точки зрения букет окружности  $\bigvee_{i=1}^r S_i^1$ , где каждая окружность соответствует критической точке индекса 1. Последний шаг — переход через точку максимума  $x_{r+1}$  — состоит в том, что мы приклеиваем ручку индекса 2, т. е. двумерный диск. Итак,  $M$  диффеоморфно  $H_0^2 \cup \underbrace{H_1^2 \cup \dots \cup H_1^2}_r \cup H_2^2$ . Приклейка по-

следней ручки (клетки) к полученному на  $(r + 1)$ -м шаге многообразию с краем  $S^1$  осуществляется уже однозначно: по тождественному отображению границы диска. Этот диск можно отождествить с фундаментальным многоугольником  $W$  задающим код  $M^2$  [2], а букет  $\bigvee_{i=1}^r S_i^1$  отождествляется с границей этого многоугольника, на которой вершины уже отождествлены в одну точку. Итак, мы получили новое доказательство теоремы классификации двумерных поверхностей, основанное на теореме существования правильной функции Морса.

## 6. Двойственность Пуанкаре

В геометрии значительную роль играет наличие двойственности между гомологиями и когомологиями, называемой двойственностью Пуанкаре. Простейший вариант этого утверждения состоит в том, что для замкнутого ориентируемого связного компактного гладкого многообразия  $M^n$  имеет место изоморфизм:  $H_k(M^n, \mathbb{R}) = H^{n-k}(M^n, \mathbb{R}) = H_{n-k}(M^n, \mathbb{R})$ . Если  $M^n$  — неориентируемо, то  $H_k(M^n, \mathbb{Z}_2) = H^{n-k}(M^n; \mathbb{Z}_2) = H_{n-k}(M^n, \mathbb{Z}_2)$ . Для определенности мы остановимся на изучении ориентируемого случая, так как анализ неориентируемого случая проводится по той же схеме.

**Теорема 6.4.** *Если  $M^n$  — ориентируемое замкнутое компактное гладкое связное многообразие, то  $H_k(M^n, \mathbb{Z}) = H^{n-k}(M^n, \mathbb{Z})$ . В частности,  $H_k(M^n, \mathbb{R}) = H^{n-k}(M^n, \mathbb{R}) = H_{n-k}(M^n, \mathbb{R})$ .*

*Доказательство.*

Существует много разных доказательств этого факта. Мы приведем здесь рассуждение, основанное на существовании правильных функций Морса, поскольку в этом случае особенно наглядна, по нашему мнению, геометрическая картина двойственности Пуанкаре. Оказывается, на ориентируемых многообразиях существуют два клеточных разбиения, которые двойственны друг другу в том смысле, что каждой клетке одного разбиения взаимно-однозначно отвечает клетка дополни-

тельной размерности из второго разбиения, причем это соответствие сохраняет (с точностью до знака) коэффициенты инцидентности клеток.

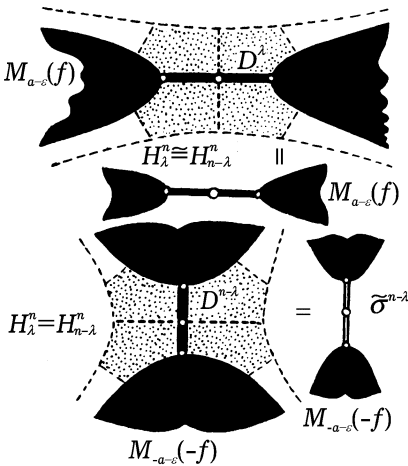


Рис. 86

Разбиениями можно установить простое геометрическое соответствие. Для этого фиксируем какую-либо критическую точку  $x$  функции  $f$  и рассмотрим малую окрестность  $U$  этой точки. Эта окрестность допускает два разложения (в смысле § 3): при помощи функции  $f$  и при помощи функции  $-f$  (рис. 86). Разложения эти различны и определяют искомые разбиения  $K$  и  $\tilde{K}$ . Клетки, составляющие, например, разбиение  $K$ , реализуются в  $M$  в виде левосторонних сепаратрисных дисков  $D^\lambda$ , отвечающих полю  $\text{grad } f$ . Клетки, составляющие  $\tilde{K}$ , реализуются в виде левосторонних сепаратрисных дисков, отвечающих полю  $\text{grad}(-f)$ , т. е. в виде правосторонних дисков  $D^{n-\lambda}$  для поля  $\text{grad } f$  (см. рис. 86). Теперь мы можем построить оператор двойственности Пуанкаре  $P: K \rightarrow \tilde{K}$ . По определению положим  $P(\sigma^\lambda) = \tilde{\sigma}^{n-\lambda}$  (рис. 87). Для того чтобы проследить за действием этого оператора на (ко)гомологиях, нужно выяснить связь между коэффициентами инцидентности  $[\sigma^\lambda: \sigma^{\lambda-1}]$  и  $[\tilde{\sigma}^{n-\lambda+1}: \tilde{\sigma}^{n-\lambda}]$ . При этом мы пользуемся клеточными гомотопиями комплексов.

Рассмотрим клетку  $\sigma_i^\lambda$  (где  $i$  — номер клетки) и клетку  $\sigma_j^{\lambda-1}$ .

Для доказательства теоремы мы должны построить такое соответствие в геометрических терминах. Пусть  $f$  — правильная функция Морса на  $M$ , имеющая только один минимум и только один максимум. Рассмотрим также функцию  $-f$ . Ясно, что если  $x$  — критическая точка индекса  $\lambda$  для функции  $f$ , то эта же точка является критической и для  $-f$ , но индекс у нее будет равен  $n - \lambda$ . В силу п. 4 § 3 функция  $f$  определяет клеточное разбиение  $K$  многообразия в сумму клеток (ручек). Функция  $-f$  также определяет клеточное разбиение  $\tilde{K}$  этого же многообразия. Между этими клеточными

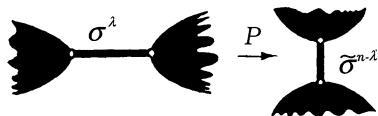


Рис. 87

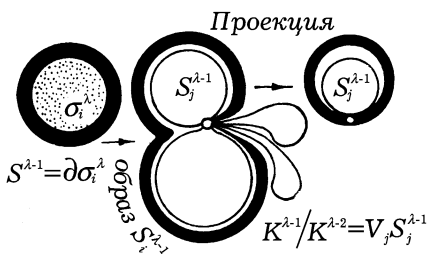


Рис. 88

Коэффициент  $[\sigma_i^\lambda: \sigma_j^{\lambda-1}]$  является степенью отображения  $q_{ij}^\lambda: S_i^{\lambda-1} \rightarrow S_j^{\lambda-1}$ , где  $S_i^{\lambda-1} = \partial\sigma_i^\lambda$  (граница клетки  $\sigma_i^\lambda$ , а отображение  $q_{ij}^\lambda$ , есть композиция характеристического отображения  $\partial\sigma_i^\lambda \rightarrow K^{\lambda-1}$ , ограниченного с клетки  $\sigma_i^\lambda$  на ее границу  $\partial\sigma_i^\lambda$ , и последующей проекции фактор-комплекса  $K^{\lambda-1}/K^{\lambda-2} = \vee_j S_j^{\lambda-1}$  на  $j$ -е слагаемое этого букета, т.е. на сферу  $S_j^{\lambda-1}$  (рис. 88). Полученное число совпадает с индексом пересечения сферы  $S_i^{\lambda-1} = \partial\sigma_i^\lambda$  с клеткой  $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda+1}$ . Напомним определение индекса пересечения. Пусть  $N^m$  и  $Q^q$  — гладкие ориентируемые подмногообразия в ориентируемом многообразии  $M^n$ , размерность которого равна сумме размерностей  $N$  и  $Q$ , т.е.  $n = m + q$ . Предположим, что  $N$  и  $Q$  находятся «в общем положении», т.е. что их пересечение состоит из конечного числа точек, и в этих точках касательные плоскости  $T_x N$  и  $T_x Q$  порождают (в сумме) все касательное пространство  $T_x M$  (т.е.  $N$  и  $Q$  пересекаются трансверсально) (рис. 89). Фиксируем ориентацию на  $M, N, Q$ . Тогда в каждой точке  $x$  пересечения  $N$  и  $Q$  возникает число  $+1$  или  $-1$ , показывающее, совпадает или нет фиксированная ориентация  $M$  с той ориентацией, которая индуцируется на этом же многообразии  $M$  касательным репером в точке  $x \in N \cap Q$ , составленным из двух реперов  $e_1, \dots, e_m \in T_x N^m$  и  $a_1, \dots, a_q \in T_x Q^q$ , каждый из которых положительно ориентирован с точки зрения  $N$  и  $Q$  соответственно (рис. 90). Складывая эти числа  $\pm 1$  по всем точкам пересечения, получаем целое число, называемое индексом пересечения  $N$  и  $Q$ .

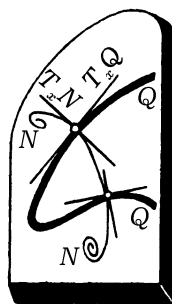


Рис. 89

Индекс пересечения сферы  $S_i^{\lambda-1}$  с клеткой  $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda-1}$  можно рассмат-

ривать как коэффициент  $\alpha$  зацепления [1, с. 528] сферы  $S_i^{\lambda-1}$  с границей этой клетки, т. е. со сферой  $\tilde{S}_j^{n-\lambda}$  (рис. 91). С другой стороны, по аналогичным соображениям, этот же коэффициент инцидентности  $\pm\alpha$  может быть представлен как индекс пересечения сферы  $S_j^{n-\lambda}$  с клеткой  $\sigma_i^\lambda$ . Следовательно  $[\sigma_i^\lambda: \sigma_j^{\lambda-1}] = \pm[\tilde{\sigma}_i^{n-\lambda}: \tilde{\sigma}_j^{n-\sigma+1}]$ . Но это и означает, что оператор  $P$  сохраняет с точностью до знака, зависящего только от размерности, коэффициенты инцидентности, т. е. клеточные комплексы  $K$  и  $\tilde{K}$  двойственны. Итак, двойственные друг другу клетки  $\sigma_j^\lambda$  и  $\tilde{\sigma}_j^{n-\lambda} = P(\sigma_j^\lambda)$  пересекаются только в одной внутренней точке (пересечение это трансверсально).

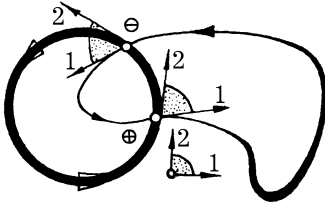


Рис. 90

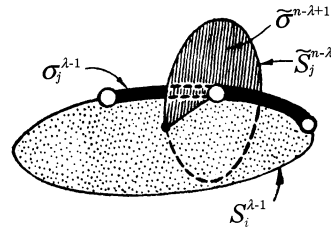


Рис. 91

Как мы знаем, клетки разбиения можно взять в качестве базиса групп целочисленных цепей, следовательно, оператор  $P$  устанавливает взаимно-однозначное соответствие между базисами групп цепей  $C_\lambda(K)$  и  $C_{n-\lambda}(\tilde{K})$ . При этом важно то, что между группами цепей мы получили невырожденное билинейное скалярное произведение, порожденное индексом пересечения. Выбирая в каждой размерности знак подходящим образом, можно считать, что для

$$a = \sum_i a_i \sigma_i^\lambda \in C_\lambda(K) \text{ и } b = \sum_j b_j \tilde{\sigma}_j^{n-\lambda} \in C_{n-\lambda}(\tilde{K})$$

мы имеем

$$(a, b) = \sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i^\lambda, \tilde{\sigma}_j^{n-\lambda}), \text{ где } (\sigma_i^\lambda, \tilde{\sigma}_j^{n-\lambda})$$

— индекс пересечения клеток (см. выше). В частности,  $(\sigma_i^\lambda, P\sigma_j^\lambda) = \delta_{ij}$ , т. е.  $\{\sigma_i^\lambda\}$  и  $\{P\sigma_j^\lambda\}$  образуют двойственные (дуальные) базисы в группах цепей. В неориентируемом случае все эти конструкции следует

выполнять «по модулю два», т.е. с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$ . В терминах этого скалярного произведения доказанное нами свойство оператора  $P$  можно записать так:  $(\partial a, b) = (a, \partial b)$ , где  $a \in C_\lambda(K)$ ,  $b \in C_{n-\lambda-1}(\tilde{K})$ , так как оператор  $\partial$  определяется коэффициентами инцидентности и  $[\sigma_i^\lambda: \sigma_j^{\lambda-1}] = [P\sigma_i^\lambda: P\sigma_j^{\lambda-1}]$ . Здесь  $\partial$  — оператор взятия границы. Итак, комплекс  $(K, \partial)$  сопряжен комплексу  $(\tilde{K}, \partial)$ , следовательно,  $H_k(M^n, \mathbb{R}) = H_{n-k}(M^n, \mathbb{R})$ . Поскольку оба клеточных комплекса  $K$  и  $\tilde{K}$  гомотопически эквивалентны одному и тому же многообразию  $M$ , то отсюда следует  $H_k(M^n, \mathbb{Z}) = H^{n-k}(M^n, \mathbb{Z})$ . Теорема доказана. ■

Важным следствием является наличие между гомологиями и когомологиями дополнительных размерностей  $H_k$ ,  $H^{n-k}$  и между гомологиями  $H_k$ ,  $H^{n-k}$  невырожденного билинейного скалярного произведения, порождаемого индексом пересечения циклов (см. выше). Если  $n = 2k$ , то  $n - k = k$ , и мы получаем на группе  $H_k(M^{2k}, \mathbb{Z})$  невырожденную билинейную форму  $(a, b) = (-1)^k(b, a)$ . Инварианты этой формы (например, сигнатура) играют важную роль в топологии многообразий.

Для любого ориентируемого связного замкнутого многообразия мы получаем  $H_0 = H_n = \mathbb{Z}$ . В качестве полезного упражнения предоставляем читателю доказать следующие равенства.

а) Пусть  $X \supset Y$ , где  $X$  и  $Y$  — конечные клеточные комплексы и  $X \setminus Y$  — открытое гладкое ориентируемое многообразие. Тогда  $H_i(X, Y, \mathbb{Z}) = H_i(X/Y, \mathbb{Z}) = H^{n-i}(X \setminus Y, \mathbb{Z})$ ,  $i > 0$ ;  $H^i(X, Y, \mathbb{Z}) = H_i(X/Y, \mathbb{Z}) = H_{n-i}(X \setminus Y, \mathbb{Z})$ ,  $i > 0$ .

б) Пусть  $X^m \subset S^n$  — конечный подкомплекс в сфере  $S^n$ ,  $m < n$ . Тогда  $H_i(X, \mathbb{Z}) = H^{n-i-1}(S^n \setminus X, \mathbb{Z})$ ,  $i > 0$ ;  $H^i(X, \mathbb{Z}) = H_{n-i}(S^n \setminus X, \mathbb{Z})$ ,  $i > 0$ .

в) Пусть  $M$  — компактное замкнутое ориентируемое многообразие и пусть  $H_k(M, \mathbb{Z}) = R_k \oplus T_k$  — разложение групп  $H_k$  в прямую сумму свободных абелевых групп  $R_k$  и абелевых групп  $T_k$  конечного порядка. Тогда  $R_k = R_{n-k}$ ,  $T_k = T_{n-k-1}$ .

г) Для любого конечного клеточного комплекса имеют место равенства:  $R_k = R^k$ ,  $T_k = T^{k+1}$ , где  $H^k = R^k \oplus T^k$ .

д) Эйлеровой характеристикой многообразия называется число  $\chi(M^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i$ , где  $\beta_i = \dim H_i(M^n, F)$ , где  $F$  — поле. Из двойственности Пуанкаре (где  $F = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{Z}_2$  в ориентируемом и  $F = \mathbb{Z}_2$  в

неориентируемом случаях) следует  $\beta_i = \beta_{n-i}$ . В частности, для нечетномерных многообразий  $M^{2k+1}$  имеем  $\chi(M^{2k+1}) = 0$ .

В качестве одного из приложений двойственности Пуанкаре докажем теорему 5.2 об оценке категории через кохомологическую длину многообразия.

*Доказательство теоремы 5.2.*

Пусть  $D: H^k(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$  — построенный нами изоморфизм двойственности Пуанкаре. Рассмотрим в кольце  $H^*(M, \mathbb{Z})$  элементы  $a_1, \dots, a_k$  такие, что  $a_1 \dots a_k \neq 0$ , и пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  — циклы, соответствующие этим коциклам при двойственности. Тогда из построения оператора  $D$  легко следует, что  $D(a_1 \dots a_k) = \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_k = \gamma$ , где  $\gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_k$  — пересечение всех циклов  $\gamma_i$ , которые можно реализовать в  $M$  в виде подкомплексов. Так как  $a_1 \dots a_k \neq 0$ , то  $\gamma$  не гомологичен нулю. Предположим теперь, что  $\text{cat } M = s \leq k$ . Это означает, что в  $M$  существуют такие замкнутые подмножества  $A_1, \dots, A_s$ , что  $M = \bigcup_{i=1}^s A_i$ , и каждое  $A_i$  стягивается по  $M$  в точку. Без ограничения

общности можно считать, что  $s = k$  и  $M = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , где все  $A_i$  стягиваются в точку. Достаточно к набору  $\{A_i\}$ , если  $s < k$ , добавить  $k - s$  точек. Сопоставим каждому циклу  $\gamma_i$  подмножество  $A_i$ . Так как  $A_i$  стягивается в точку по  $M$ , то  $H_j(M) = H_j(M, A_i)$ ,  $j > 0$ . Отсюда следует, что каждый цикл  $\gamma_i$  гомологичен циклу  $\tilde{\gamma}_i \subset M \setminus A_i$ , т. е. цикл  $\gamma_i$  можно «снять» с подмножества  $A_i$ . Но тогда

$$\gamma = \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_k \sim \bigcap_{i=1}^k \tilde{\gamma}_i \subset \bigcap_{i=1}^k (M \setminus A_i) = M \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i = \emptyset,$$

т. е.  $\gamma$  гомологичен нулю. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

---

---

## ГЛАВА 3

# Топология трехмерных многообразий

## § 7. Каноническое представление трехмерных многообразий

### 1. Правильные функции Морса и диаграммы Хегора

В курсе дифференциальной геометрии и топологии [2] доказывается теорема классификации двумерных замкнутых многообразий  $M^2$ . Эта классификация имеет простой вид: любое  $M^2$  задается (неоднозначно) фундаментальным многоугольником, граница которого отождествлена специальным образом. Множество таких многоугольников задает множество кодов двумерных многообразий, причем существует простой алгоритм, отвечающий на вопрос, задают ли два таких кода одно и то же многообразие или они определяют разные (не гомеоморфные) многообразия. Для этого достаточно привести коды (т. е. многоугольники) к каноническому виду. При переходе к изучению трехмерных многообразий задача их классификации резко усложняется и до настоящего времени пока не решена. Эта задача интересна не только сама по себе, но и тем, что с ней, как выяснилось, связано много важных вопросов из алгебры, анализа, геометрии. В этой главе мы вкратце коснемся некоторых из этих вопросов.

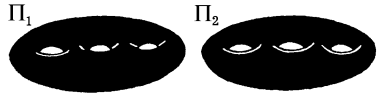


Рис. 92

Рассмотрим два экземпляра двумерной сферы с  $g$  ручками, стандартно вложенные в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 92). Каждое из этих двумерных многообразий  $M_g^2$  ограничивает в  $\mathbb{R}^3$  трехмерное многообразие, которое можно рассматривать как «заполнение»  $M_g^2$  в  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим эти два трехмерных многообразия через  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Ясно, что  $\partial\Pi_i = M_i$ , где через  $M_1$  и  $M_2$  обозначены для краткости два экземпляра  $M_g^2$ . Каждое из  $\Pi_i$  гомотопически эквивалентно букету из  $g$  окружностей (рис. 93). Пусть  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$  — произвольный диффеоморфизм  $M_1$  на  $M_2$ . Тогда

можно построить трехмерное многообразие без края (т.е. замкнутое), склеив  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  по этому отображению их границ. Полученное многообразие обозначим через  $M^3(\alpha)$ .

**Теорема 7.1 (Теорема о каноническом представлении трехмерных многообразий).** Любое трехмерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие может быть (неоднозначно) представлено для некоторого целого  $g \geq 0$  в виде  $M^3(\alpha)$ , т.е. в виде склейки двух трехмерных многообразий  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  по некоторому диффеоморфизму (гомеоморфизму) их границ  $M_1$  и  $M_2$ . Каждое из  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  гомеоморфно трехмерному шару с  $g$  ручками.

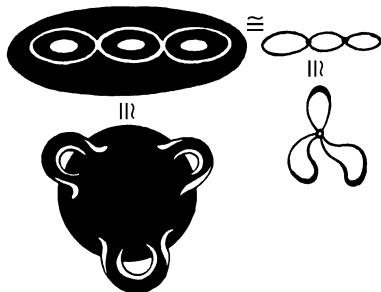


Рис. 93

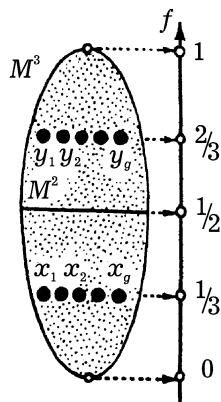


Рис. 94

*Доказательство.*

Рассмотрим на трехмерном многообразии  $M^3$  правильную функцию Морса (см. § 6, п. 5), имеющую один минимум, один максимум и точки  $x_1, \dots, x_g$  индекса 1 и  $y_1, \dots, y_r$  индекса 2. Будем считать, что критические точки упорядочены, т.е.  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f_0 = \min$ ,  $f_1 = \max$ , все критические точки индекса 1 расположены на поверхности уровня  $f_{1/3}$ , а все точки индекса 2 — на поверхности  $f_{2/3}$ . Из двойственности Пуанкаре следует, что  $g = r$ , т.е. число критических точек индексов 1 и 2 одинаково (напомним, что эйлерова характеристика  $M^3$  равна нулю, а потому  $0 = 1 - g + r - 1$ , т.е.  $g = r$ ). Рассмотрим поверхность  $f_{1/2}$ . Поскольку на ней нет критических точек функции,

то  $f_{1/2}$  гомеоморфна двумерному компактному гладкому связному ориентируемому многообразию  $M^2$ , т. е.  $M^2$  гомеоморфно сфере с некоторым числом ручек (рис. 94). Ясно, что  $M^3 = (f \leq 1/2) \cup (f \geq 1/2)$ , где многообразия  $(f \leq 1/2)$  и  $(f \geq 1/2)$  имеют край  $M^2$ . Каждое из них при этом гомеоморфно трехмерному шару с  $g$  ручками. Дело в том, что каждое из этих многообразий получено из трехмерной ручки индекса 0 прилейкой  $g$  ручек индекса 1. Итак, можно положить  $\Pi_1 = (f \leq 1/2)$ ,  $\Pi_2 = (f \geq 1/2)$ . Теорема доказана. ■

Представление многообразия  $M^3$  в виде  $M^3(\alpha)$  иногда называют диаграммой Хегора. Таким образом, эта диаграмма определяется заданием некоторого диффеоморфизма  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$ .

**Лемма 7.1.** Если два диффеоморфизма  $\alpha, \beta: M_1 \rightarrow M_2$  гомотопны в классе диффеоморфизмов, то соответствующие им многообразия  $M^3(\alpha)$  и  $M^3(\beta)$  диффеоморфны. Если  $M^3 = M^3(\alpha)$  — представление многообразия, отвечающее некоторой диаграмме Хегора, то на  $M^3$  существует правильная функция Морса, определяющая разбиение  $M^3$  в объединение  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , совпадающее с исходной диаграммой Хегора.

*Доказательство.*

Первая часть леммы очевидна, так как гладкую гомотопию в классе диффеоморфизмов можно продолжить в некоторую малую трубчатую окрестность поверхности  $M^2$  в  $M^3$ . Второе утверждение следует из того, что на  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  определены стандартные функции Морса  $f_1$  и  $f_2$  с критическими точками индекса 1 для  $\Pi_1$  и индекса 2 для  $\Pi_2$ , построенные нами выше в § 3 (рис. 95). Напомним, что эти функции постоянны на краях  $\partial\Pi_1$  и  $\partial\Pi_2$ , что и позволяет организовать общую функцию Морса на всем  $M^3$ . Лемма доказана. ■

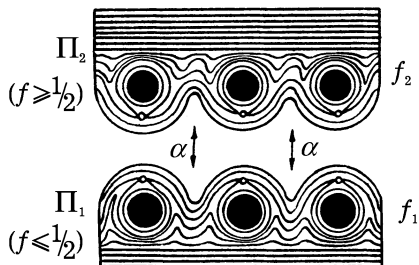


Рис. 95

## 2. Примеры диаграмм Хегора

Число  $g$ , равное числу ручек у  $M^2 = f_{1/2} = \partial\Pi_i$ , называется иногда родом диаграммы Хегора. Рассмотрим простейшие примеры, позволяющие наглядно представить себе построение диаграмм  $M^3(\alpha)$ . Единственное многообразие  $M^3$ , допускающее диаграмму Хегора рода  $g = 0$ ,

это трехмерная сфера. В самом деле, так как  $g = 0$ , то  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  гомеоморфны трехмерному шару. Следовательно, нужное утверждение вытекает из того, что соответствующая функция Морса, построенная в лемме 7.1, имеет только две критические точки (минимум и максимум), а потому в силу предложения 4.3  $M^3$  гомеоморфно стандартной сфере. Многообразий  $M^3$ , допускающих диаграммы Хегора рода 1, уже значительно больше. Здесь  $\Pi_1 \approx \Pi_2 = S^1 \times D^2$ . Во-первых, такую диаграмму допускает сфера  $S^3$ . Эта диаграмма Хегора рода 1 реализуется так: вложим  $S^3$  в  $\mathbb{C}^2(z, w)$ , тогда  $\Pi_1 = S^3 \cap \{|z| \geq |w|\}$ ,  $\Pi_2 = S^3 \cap \{|z| \leq |w|\}$ . Ортогональное преобразование  $(z, w) \rightarrow (w, z)$  переводит  $\Pi_1$  в  $\Pi_2$  (и наоборот), при этом граница полнотория переходит в себя, и получающееся отображение есть искомым склеивающий диффеоморфизм  $\alpha$  в диаграмме  $S^3 = M^3(\alpha)$ .

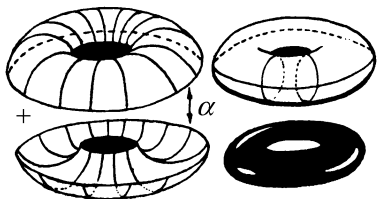


Рис. 96

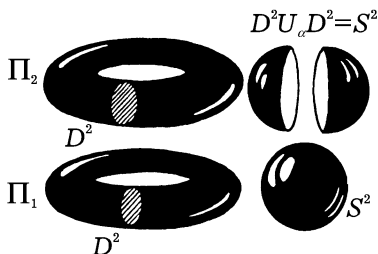


Рис. 97

Следующий пример — многообразие  $S^1 \times S^2$ , допускающее диаграмму Хегора рода 1. Достаточно взять в качестве  $\alpha: T^2 \rightarrow T^2$  тождественное отображение тора на себя. Ясно, что склейка двух полноторий  $S^1 \times D^2$  по такому отображению их границ дает  $S^1 \times S^2$ . Чтобы представить этот процесс нагляднее, полезно рассмотреть его аналог в двумерном случае (рис. 96). Склеивая два кольца  $S^1 \times D^1$  и  $S^1 \times D^1$  по тождественному отображению их границ, получаем, очевидно, тор, т. е.  $S^1 \times S^1$ . То же самое происходит и в трехмерном случае (рис. 97). Пусть  $D^2$  — произвольный диск — слой в прямом произведении  $\Pi_1 = S^1 \times D^2$ . Этот диск, склеиваясь со вторым таким же диском в  $\Pi_2$  по тождественному отображению их границ — окружностей, дает двумерную сферу.

Таким образом, ясен некоторый общий принцип построения многообразий  $M^3$ , допускающих диаграмму Хегора рода 1. Диф-

феоморфизм  $\alpha: T^2 \rightarrow T^2$  определяет индуцированное отображение  $\alpha_*: H_1(T^2, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{Z})$ , т. е.  $\alpha_*: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Следовательно, гомоморфизм  $\alpha_*$ , являющийся автоморфизмом  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , задается целочисленной матрицей  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $ad - bc = \pm 1$  (+1, если  $\alpha$  сохраняет ориентацию тора, и -1, если  $\alpha$  меняет ориентацию). Так, например, в разобранных выше примерах мы имеем: а) в случае сферы  $\alpha_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , б) в случае  $S^1 \times S^2$  имеем  $\alpha_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Докажите, что диффеоморфизмы, задающие матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , по-прежнему определяют многообразие  $S^1 \times S^2$ . Также предоставляем читателю доказать.

**Предложение 7.1.** Любое трехмерное гладкое компактное замкнутое связное многообразие, допускающее диаграмму Хегора рода 1, гомеоморфно (и диффеоморфно) одному из следующих многообразий: 1) стандартная сфера  $S^3$ , 2)  $S^1 \times S^2$ , 3) так называемые линзовые пространства, получающиеся факторизацией стандартной сферы  $S^3$  по гладкому действию на ней группы  $\mathbb{Z}_p$ , задаваемому формулой  $(z, w) \rightarrow (e^{2\pi i/p} \cdot z, e^{2\pi i k/p} \cdot w)$ , где  $z, w$  — комплексные координаты в  $\mathbb{C}^2(z, w)$ ,  $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$ . В частности, линза  $S^3/\mathbb{Z}_2$  (при  $p = 2$ ) диффеоморфна проективному пространству  $\mathbb{R}P^3$ .

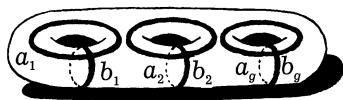


Рис. 98

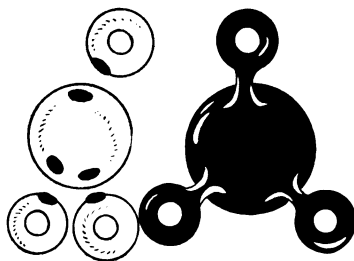


Рис. 99

Таким образом, имеется полное описание всех многообразий  $M^3$ , допускающих диаграмму Хегора рода 1. Однако при переходе к случаю  $g > 1$  картина резко усложняется, и аналогичные теоремы классификационного характера пока отсутствуют. Приведем простейший пример диаграммы Хегора рода  $g > 1$ . Пусть  $a_i$  и  $b_i$ , где  $1 \leq i \leq g$  — стандартные параллели и меридианы на поверхности  $M_g^2$  (рис. 98). Рассмотрим диффеоморфизм  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$ , меняющий местами параллели и меридианы, т. е.  $\alpha(a_i) = b_i$ ,  $\alpha(b_i) = -a_i$ ,  $1 \leq i \leq g$ . Этот диффеомор-

физм можно построить так. Представим  $M_g^2$  в виде сферы с  $g$  ручками (рис. 99). При этом можно считать, что к сфере  $S^2$  с  $g$  дырками приклеено  $g$  экземпляров тора  $T^2$  с дыркой. Дiffeоморфизм  $\alpha$  на сфере с дырками определим как тождественное отображение. На каждом торе с дыркой рассмотрим диффеоморфизм, меняющий местами параллель и меридиан (рис. 100). Можно считать, что дырка переходит в себя. Поскольку  $a_i \rightarrow b_i$  и  $b_i \rightarrow -a_i$ , то, как видно из рис. 100, граница дырки (окружность) переходит в себя тождественно. Следовательно, стыкуя построенные нами диффеоморфизмы на ручках и на сфере с дырками, мы и получаем диффеоморфизм  $\alpha$ . Склеивая  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  по этому диффеоморфизму, получаем стандартную сферу  $S^3$ . Это утверждение доказывается точно так же, как и аналогичный факт для  $g = 1$ . В самом деле, рассмотрим в  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$  стандартно вложенное трехмерное многообразие  $\Pi_1$  с краем  $M_g^2$ . Тогда дополнение к нему в  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ , очевидно, гомеоморфно второму экземпляру  $\Pi_2$ , причем роль параллелей исполняют теперь меридианы и наоборот (рис. 101).

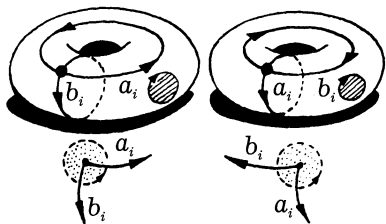


Рис. 100

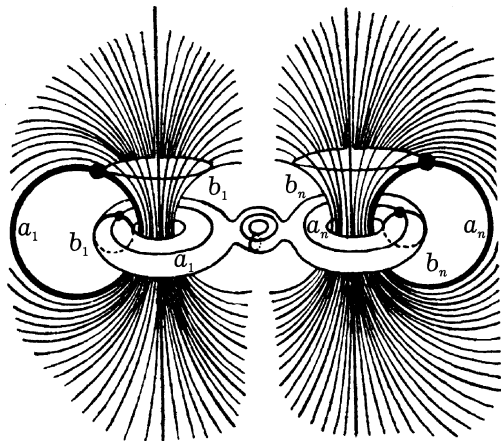


Рис. 101

### 3. Кодирование трехмерных многообразий при помощи сетей

Диаграммы Хегора могут быть заданы эквивалентным, но более наглядным образом. Рассмотрим поверхность рода  $g$ , т.е.  $M_g^2$ , и за-

дадим на ней две системы гладких несамопересекающихся окружностей  $S_1, \dots, S_g$  и  $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_g$ , которые назовем окружностями индекса 1 и индекса 2 соответственно. Предположим далее, что: 1) окружности одного индекса не пересекаются, 2) если разрезать поверхность  $M_g^2$  по всем окружностям индекса 1 или по всем окружностям индекса 2, то в результате в обоих случаях получится сфера  $S^2$  с  $2g$  дырками. Пример такой системы окружностей нам уже известен (см. рис. 98). Ясно, что, разрезая  $M_g^2$  по всем  $a_1, \dots, a_g$  или по всем  $b_1, \dots, b_g$ , мы получаем двумерную сферу с  $2g$  дырками (рис. 102). Систему окружностей, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, обозначим через  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .

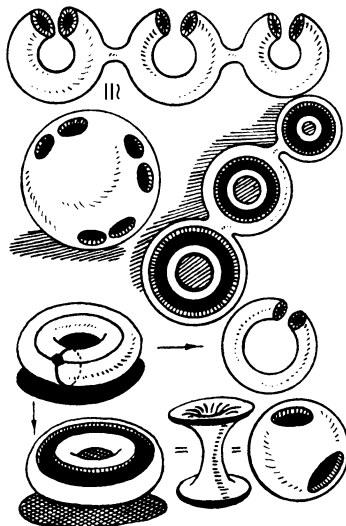


Рис. 102

**Определение 7.1.** Две системы  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\alpha'_1, \alpha'_2)$  окружностей, описанных выше, назовем эквивалентными, если существует диффеоморфизм  $\alpha: M_g^2 \rightarrow M_g^2$  такой, что он переводит одну систему в другую. Сетью  $[\alpha_1, \alpha_2]$  назовем на  $M_g^2$  класс эквивалентных систем  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Число  $g$  назовем родом сети.

**Лемма 7.2.** Каждая сеть  $[\alpha_1, \alpha_2]$  определяет некоторое трехмерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие, которое мы обозначим через  $M^3[\alpha_1, \alpha_2]$ . Обратно, любое трехмерное замкнутое компактное связное гладкое многообразие может быть представлено в виде  $M^3[\alpha_1, \alpha_2]$  для некоторого целого  $g$ .

*Доказательство.*

Построим по сети трехмерное многообразие. Для этого рассмотрим прямое произведение поверхности  $M_g^2$  на отрезок  $I$ . В верхнем крае этого прямого произведения выделим систему окружностей индекса 2, т. е.  $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_g$ . Поскольку  $M_g^2$  ориентируемо, то достаточно малая труб-

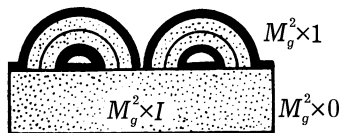


Рис. 103

чатая окрестность каждой из окружностей  $\bar{S}_i$  гомеоморфна прямому произведению  $\bar{S}_i$  на отрезок. Следовательно, поступая по схеме п. 5 § 3, мы можем приклеить  $g$  ручек  $H_2^2$  индекса 2, т. е. произвести перестройку верхнего края многообразия  $M_g^2 \times I$ , используя систему окружностей  $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_g$ . При этом получится некоторое новое трехмерное многообразие  $(M_g^2 \times I) \cup (\bigcup_1^g H_2^2)$ , верхний край которого есть результат перестройки многообразия  $M_g^2$  (нижнего края) (рис. 103). Мы утверждаем, что этот верхний край гомеоморфен сфере  $S^2$ . В самом деле, из определения сети следует, что  $M_g^2 \setminus (\bigcup_{i=1}^g \bar{S}_i)$  гомеоморфно сфере с  $2g$  дырками.

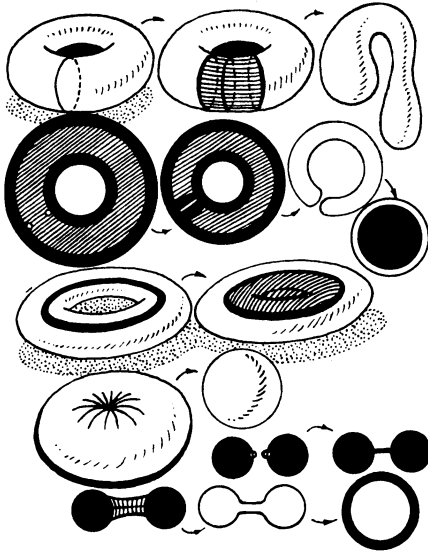


Рис. 104

Фиксируем какую-нибудь окружность  $\bar{S}_i$ , порождающую (после разрезания) две дырки  $D_i$  и  $D'_i$ . Перестройка индекса 2 была нами уже изучена ранее (см. рис. 24). Ясно, что она эквивалентна приклейке двух дисков к границам дырок, образовавшихся после разрезания поверхности по  $\bar{S}_i$ . Поскольку это выполняется для каждой окружности  $\bar{S}_i$ , то мы заклеиваем в результате перестройки все дырки в сфере и получаем сферу  $S^2$ . При  $g = 1$  и  $g = 2$  эта операция показана на рис. 104, 105.

Теперь рассмотрим другую систему окружностей  $S_1, \dots, S_g$  индекса 1 на  $M_g^2$  и, взяв прямое произведение  $M_g^2 \times I$ , повторим описанную выше операцию

для системы  $S_1, \dots, S_g$ . Склеивая вместе два перестроенных прямых произведения по общему краю  $M_g^2$ , получаем трехмерное многообразие, край которого состоит из двух двумерных сфер. Одна из них получена перестройкой по окружностям индекса 2, а вторая — по окружностям индекса 1 (на рис. 106) эти две сферы условно из-

ображены жирными черными кривыми. Последний шаг: приклеиваем к этим сферам трехмерные диски, в результате чего получаем трехмерное многообразие  $M^3[\alpha_1, \alpha_2]$ . Обратное, пусть  $M^3$  — произвольное многообразие типа, указанного в условии теоремы. Представим его в виде  $M^3[\alpha_1, \alpha_2]$ . Рассмотрим на  $M^3$  правильную функцию Морса  $f$  такую, что у нее одна точка минимума ( $f = 0$ ), одна точка максимума ( $f = 1$ ), критические точки  $x_1, \dots, x_g$  индекса 1, расположенные на  $f_{1/3}$ , а точки  $y_1, \dots, y_g$  индекса 2 — на поверхности  $f_{2/3}$  (см. рис. 94). Тогда  $M^3 = \Pi_1 \cup_\alpha \Pi_2$ , где  $\Pi_1, \Pi_2$  — «заполнения» поверхностей  $M_g^2$  в  $\mathbb{R}^3$  (см. выше). Рассмотрим левосторонние сепаратрисные диски  $D^2(y_1), \dots, D^2(y_g)$  для точек  $y_1, \dots, y_g$  и правосторонние сепаратрисные диски  $D^2(x_1), \dots, D^2(x_g)$ . Эти диски пересекаются с поверхностью  $f_{1/2} = M_g^2$  по двум системам окружностей, которые, очевидно, являются правосторонними окружностями  $S^1(x_1), \dots, S^1(x_g)$  и левосторонними окружностями  $S^1(y_1), \dots, S^1(y_g)$ . Ясно, что окружности  $S^1(x_i)$  отождествляются с окружностями  $S_i$  индекса 1, а окружности  $S^1(y_i)$  — с окружностями  $\bar{S}_i$  индекса 2. В частности, теперь становится понятным название «окружности индексов 1 и 2», принятое нами в определении 7.1. Из определения сепаратрисных дисков сразу следует, что эти две системы окружностей на поверхности  $M_g^2$  определяют сеть в смысле определения 7.1. Лемма доказана. ■

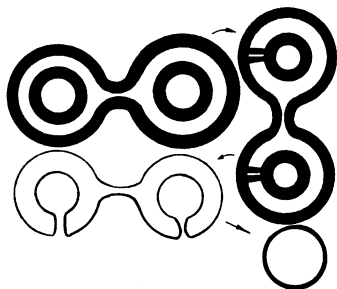


Рис. 105

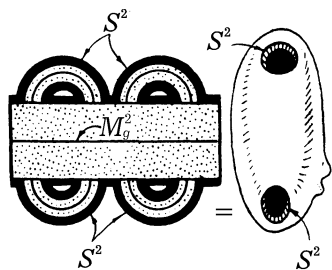


Рис. 106

Таким образом, род сети — это число критических точек у соответствующей правильной функции Морса на трехмерном многообразии. Из доказательства леммы 7.2 видно, что задание сети  $[\alpha_1, \alpha_2]$  определяет некоторый диффеоморфизм  $\alpha: M_g^2 \rightarrow M_g^2$ , и, обратно, каждый

такой диффеоморфизм определяет некоторую сеть. Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать сеть  $[\alpha_1, \alpha_2]$  тем же символом  $\alpha$ , что и соответствующий этой сети диффеоморфизм (более точно — класс диффеоморфизмов). Теперь мы можем дать еще одну интерпретацию систем окружностей  $\alpha_1 = \{S_i\}$  и  $\alpha_2 = \{\bar{S}_i\}$ . Из леммы 7.2 следует, что если  $\alpha$  — диффеоморфизм, отвечающий данной сети  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , то в качестве окружностей  $\bar{S}_i$ , можно взять образы окружностей  $S_i$  при этом диффеоморфизме (равно, как и наоборот). Таким образом, задание диаграммы Хегора эквивалентно заданию сети (и наоборот).

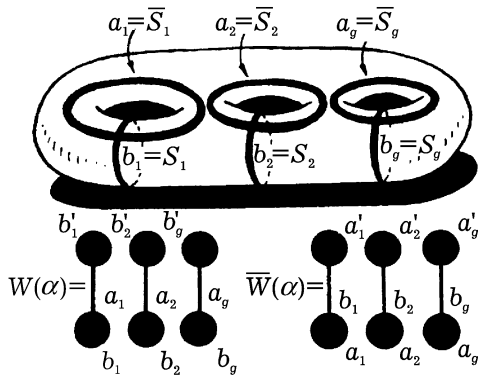


Рис. 107

#### 4. Сети и сепаратрисные диаграммы

Стараясь найти все более простые способы кодирования трехмерных многообразий, мы предьявим сейчас особенно простой способ задания  $M^3$ . Рассмотрим произвольную сеть  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$ , и пусть  $(\alpha_1, \alpha_2)$  — какой-либо ее представитель, т. е. две системы окружностей. Фиксируем, например, систему  $\{\bar{S}_j\}$  и разрежем  $M_g^2$  по всем окружностям  $\{S_j\}$ . Получим сферу с  $2g$  дырками. При этом окружности  $\bar{S}_j$  также разрежутся и превратятся на сфере  $S^2$  в набор отрезков, соединяющих дырки. Считая каждую дырку за точку на сфере (т. е. выкалывая точку, вместо того чтобы выбрасывать диск), мы получаем на сфере  $S^2$  плоский граф, который обозначим через  $W(\alpha)$ , где  $\alpha$  — сеть. Точно так же возникает второй граф  $\bar{W}(\alpha)$ , получающийся, если мы поменяем ролями  $\{S_i\}$  и  $\{\bar{S}_i\}$ . Итак, каждая сеть однозначно определяется двумя графами  $W(\alpha)$  и  $\bar{W}(\alpha)$ , которые при желании мож-

но рассматривать как плоские графы, удалив из сферы какую-нибудь точку (отличную от вершин графа). На рис. 107 показаны эти графы для простейшей сети, задающей сферу  $S^3$  — сети параллелей и меридианов на  $M_g^2$ . Оказывается, оба эти графа однозначно определяются сепаратрисной диаграммой функции  $f$  на  $M^3$ , сепаратрисные окружности которой совпадают с  $\{S_i\}$  и  $\{\bar{S}_j\}$ .

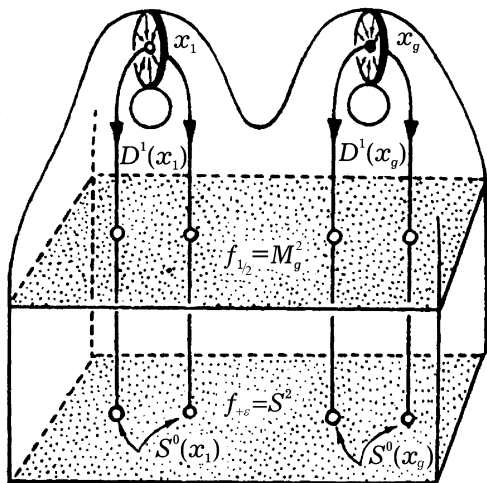


Рис. 108

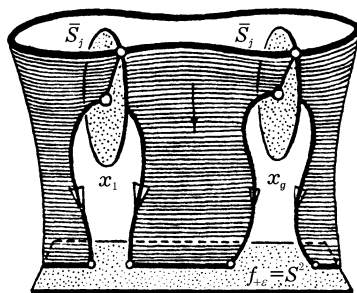


Рис. 109

В самом деле, рассмотрим точки  $x_1, \dots, x_g$  и выходящие из них сепаратрисы. Правосторонний диск  $D^2(x_i)$  двумерен, левосторонний диск  $D^1(x_i)$  одномерен. На рис. 108 условно показано взаимодействие этих дисков. Стрелками показано направление векторного поля  $-\text{grad } f$ . Две сепаратрисы, образующие одномерный диск  $D^1(x_i)$ , выходят из  $x_i$ , и, спускаясь вниз, достигают поверхности уровня  $f_{+\epsilon}$  гомеоморфной сфере  $S^2$  малого радиуса, окружающей точку минимума функции. Встречаясь с этой сферой, диск  $D^1(x_i)$  высекает на ней две точки — нульмерную сферу  $S^0(x_i)$ . Рассмотрим теперь какую-либо окружность  $\bar{S}_j$  — границу левостороннего диска  $D^2(y_j)$ . Эта окружность, расположенная на  $M_g^2 = f_{1/2}$ , также увлекается интегральными траекториями поля  $-\text{grad } f$  вниз по направлению к сфере  $S^2 = f_{1/2}$ . При этом окружность  $\bar{S}_j$  разрывается, натываясь, на сепаратрисные

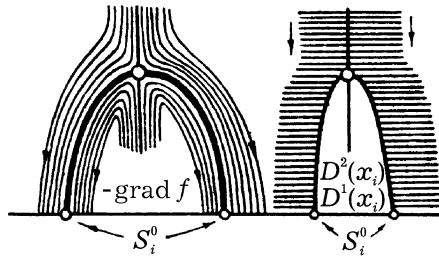


Рис. 110

диски  $\{D^2(x_i)\}$ . Происходящие при этом события показаны на рис. 109. Окружность  $\bar{S}_j$ , встречаясь с диском  $D^2(x_i)$ , разрезается этим диском пополам, и точки разреза начинают скользить вниз, спускаясь по одномерным сепаратрисам вплоть до сферы  $S^2 = f_{+\epsilon}$ . На рис. 110 показаны интегральные траектории поля  $-\text{grad } f$  в окрестности сепаратрисной диаграммы. Этот поток и увлекает вниз разрезанные на куски окружности  $\{\bar{S}_j\}$ . Таким образом, на сфере  $S^2$  возникает граф, вершины которого — сепаратрисные нульмерные сферы (двоеточия)  $\{S^0(x_i)\}$ , а ребра — это отрезки окружностей  $\{\bar{S}_j\}$ . Точно таким же образом граф  $\bar{W}(\alpha)$  возникает на верхней сфере  $S^2 = f_{1-\epsilon}$  при рассмотрении  $\{S^0(y_j)\}$  и отрезков окружностей  $\{S^1(x_i)\}$ . В этом случае куски окружностей  $S^1(x_i)$  увлекаются вверх потоком  $\text{grad } f$ .

## § 8. Задача распознавания трехмерной сферы

### 1. Гомологические сферы

Выше мы предъявили «список всех трехмерных многообразий» (но не их классификацию), т. е. указали счетное множество кодов, например графов  $W(\alpha)$ ,  $\bar{W}(\alpha)$ , каждый из которых определяет некоторое трехмерное многообразие. Кроме того, любое трехмерное многообразие обязательно представлено в этом списке (бесконечным количеством кодов). Однако наличие такого списка отнюдь не означает, что нами получена классификация трехмерных многообразий в том смысле, в каком она имеется для двумерных многообразий. Дело в том, что каждое многообразие  $M^3$  представлено в этом списке не одним каноническим кодом, а бесконечным множеством кодов. Возникает задача классификации: существует ли такой алгоритм, который, действуя

по «единообразной программе», давал бы ответ на следующий вопрос: определяют ли два кода одно многообразие  $M^3$  или разные, т. е. не диффеоморфные, многообразия? При этом требуется, чтобы алгоритм этот определялся последовательностью операций (программой), определение которых не зависело бы от пары кодов, поданных на «вход» алгоритма. Дело в том, что, имея дело с какими-нибудь двумя конкретными кодами, можно иногда получить ответ на вопрос за счет каких-то весьма специфических соображений, применимых лишь в случае этих кодов и не действующих в других случаях. Мы не будем углубляться здесь в точную алгоритмическую постановку задачи, ограничившись интуитивным представлением об алгоритме как о «машине», действующей по заданной программе и перерабатывающей поданные на ее «вход» сигналы. В данном случае это — пары кодов многообразий.

Простейшим вопросом в этом направлении является вопрос о распознавании среди множества всех кодов всех трехмерных многообразий — кодов простейшего многообразия — стандартной сферы. Другими словами, как распознать диаграммы Хегора, отвечающие  $S^3$ ? Чем эти диаграммы отличаются от диаграмм других многообразий, не диффеоморфных  $S^3$ ? Этот вопрос иногда называют алгоритмической проблемой Пуанкаре распознавания сферы. Есть несколько естественных кандидатов на звание «характеристического свойства стандартной сферы». Простейшая гипотеза: если одномерные гомологии многообразия  $M^3$  тривиальны, то это многообразие диффеоморфно сфере. Эта гипотеза кажется на первый взгляд правдоподобной вследствие наличия следующего простого утверждения.

**Предложение 8.1.** Пусть  $M^3$  — трехмерное замкнутое ориентируемое связное многообразие, и  $H_1(M^3, \mathbb{Z}) = 0$ . Тогда  $M^3$  имеет те же целочисленные гомологии, что и сфера, т. е.  $H_*(M^3, \mathbb{Z}) = H_*(S^3, \mathbb{Z})$ .

Такие многообразия называются иногда гомологическими сферами.

*Доказательство.*

Так как  $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ , то в силу двойственности Пуанкаре  $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$ . Поскольку  $R_1 = R^1$  и  $T_0 = T^1$ , то  $H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ . Так как  $H^3(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , то  $T_2 = T^3 = 0$  и  $R^2 = R_2 = 0$ , т. е.  $H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$ . Утверждение доказано. ■

Однако, сформулированная гипотеза неверна.

**Предложение 8.2.** Существуют трехмерные гомологические сферы,

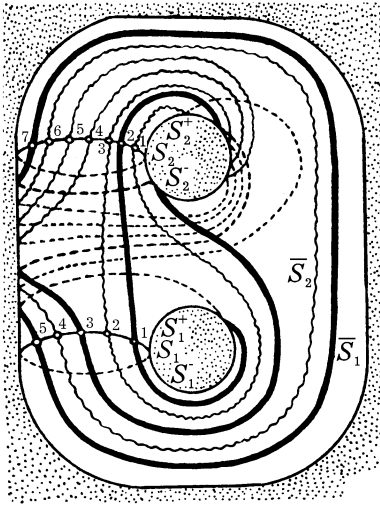


Рис. 111

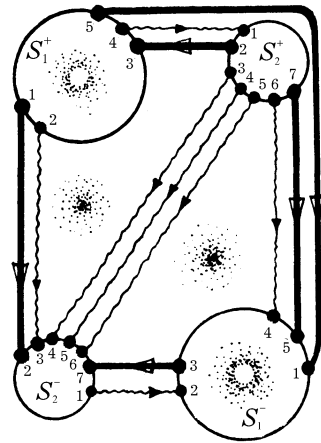


Рис. 112

гомотопически не эквивалентные (и тем более не диффеоморфные) стандартной трехмерной сфере.

Мы докажем это утверждение, предъявив трехмерное многообразие, являющееся гомотологической сферой, но имеющее ненулевую фундаментальную группу и, следовательно, гомотопически не эквивалентное сфере. Для этого укажем диаграмму Хегора рода 2, т. е. зададим на поверхности  $M_2^2$  (на кренделе) сеть  $[\alpha_1, \alpha_2]$ . Эта сеть должна состоять из двух семейств окружностей  $S_1, S_2$  и  $\bar{S}_1, \bar{S}_2$  (см. определение 7.1). Эта сеть показана на рис. 111. Здесь окружности  $S_1$  и  $S_2$  (индекса 1) являются стандартными меридианами, окружность индекса 2 —  $\bar{S}_1$  изображена сплошной гладкой траекторией на кренделе, а окружность индекса 2 —  $\bar{S}_2$  изображена волнистой траекторией. Предоставляем читателю убедиться в том, что это действительно, сеть, т. е. что, разрезав крендель по  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$ , мы получим сферу с четырьмя дырками. При разрезании вдоль  $S_1$  и  $S_2$  это утверждение очевидно. На рис. 112 эта же сеть показана в другой эквивалентной модели: в виде графа  $W(\alpha)$  на сфере  $S^2$  с четырьмя выколотыми точками. Впрочем, мы изобразили эти выколотые точки как выброшенные диски, чтобы полностью сохранить всю информацию об отождествлении  $S_1 = S_1^+ \cup S_1^-$  и  $S_2 = S_2^+ \cup S_2^-$ .

Другими словами, граф на рис. 112 получается из схемы на рис. 111 при разрезании кренделя вдоль окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Итак, мы предъявили некоторое трехмерное многообразие. Мы утверждаем, что фундаментальная группа этого многообразия отлична от нуля. Для доказательства нам потребуется более общее утверждение о структуре фундаментальной группы трехмерного многообразия  $M^3(\alpha)$ , отвечающего сети  $\alpha$ . Рассмотрим сеть  $\alpha = (S_1, \dots, S_g; \bar{S}_1, \dots, \bar{S}_g)$ . Фиксируем на всех окружностях, образующих сеть, ориентацию. Рассмотрим затем произвольную окружность индекса 2 —  $\bar{S}_j$ , и, двигаясь по ней в направлении ее ориентации, будем последовательно отмечать все точки ее пересечения с окружностями индекса 1. При этом в точке пересечения с окружностью  $S_i$  индекса 1 будем ставить символ  $S_i^{+1}$ , если индекс пересечения в этой точке окружностей  $\bar{S}_j$  и  $S_i$  положителен, и будем ставить  $S_i^{-1}$  в противном случае. Тем самым, совершая полный обход по окружности  $\bar{S}_j$ , мы выписываем некоторое слово  $W_j = S_{i_1}^{\pm 1} S_{i_2}^{\pm 1} \dots$ , однозначно определяющее, с какими окружностями индекса 1 пересекается окружность  $\bar{S}_j$ . Тем самым мы однозначно определяем набор из  $g$  слов:  $W_1, \dots, W_g$ .

**Теорема 8.1.** Пусть  $M^3 = M^3(\alpha)$ , где  $\alpha$  — некоторая сеть. Рассмотрим свободную группу  $F_g$  с образующими  $S_1, \dots, S_g$  и набор элементов  $\{W\} = (W_1, \dots, W_g)$ , построенный описанной выше процедурой. Пусть  $N\{W\}$  — наименьший нормальный делитель в группе  $F_g$ , содержащий элементы  $W_1, \dots, W_g$ , т. е. порожденный элементами  $W_1, \dots, W_g$  и всевозможными их сопряжениями на произвольные элементы группы  $F_g$ . Тогда фундаментальная группа  $\pi_1(M^3)$  изоморфна фактор-группе  $F_g/N\{W\}$ .

*Доказательство.*

Напомним общий рецепт вычисления фундаментальной группы клеточного комплекса  $K$  с одной вершиной (нульмерной клеткой) [2, 3]. Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_g$  — одномерные клетки комплекса, а  $e_1, \dots, e_g$  — его двумерные клетки. Тогда характеристические отображения двумерных клеток, будучи ограничены на границы клеток, определяют с точностью до сопряженности элементы  $W_1, \dots, W_r$  свободной группы  $F_g(\sigma_1, \dots, \sigma_g)$ . Тогда фундаментальная группа комплекса изоморфна фактор-группе свободной группы по наименьшему нормальному делителю, содержащему  $W_1, \dots, W_r$ . Этот нормальный делитель порожден элементами вида  $T_i W_i T_i^{-1}$ , где  $T_i$  — произвольные элементы груп-

пы  $F_g$ . Применим эту теорему в нашей ситуации. Из теоремы 7.1 следует, что  $M^3$  получается склейкой  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Комплекс  $\Pi_1$  гомотопически эквивалентен букету окружностей  $\bigvee_{i=1}^g D_i^*$ , каждая из которых является «осью ручки» индекса 1 и получается из левостороннего диска, исходящего из точки индекса 1. Каждая такая ручка (см. рис. 108) получается прямым умножением «оси» — окружности — на правосторонний сепаратрисный диск, границей которого и является окружность  $S_i$  индекса 1, лежащая на поверхности  $f_{1/2}$ . Левосторонние двумерные диски, исходящие из точек индекса 2, опускаются на поверхность  $f_{1/2}$  и определяют на ней окружности  $\bar{S}_j$  индекса 2. Ясно, что каждое пересечение окружности  $\bar{S}_j$  с какой-то окружностью  $S_i$  означает, что граница двумерной клетки (т.е.  $\bar{S}_j$ ) прошла по ручке, соответствующей окружности  $S_i$ . Следовательно, элементы-слова  $W_1, \dots, W_g$ , построенные нами выше по окружностям индекса 2, задают характеристические отображения границ двумерных клеток (индекса 2), переводящих эти окружности  $\bar{S}_j$  в одномерный остов комплекса  $\Pi_1$ . Теорема доказана. ■

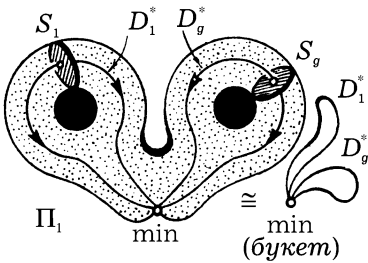


Рис. 113

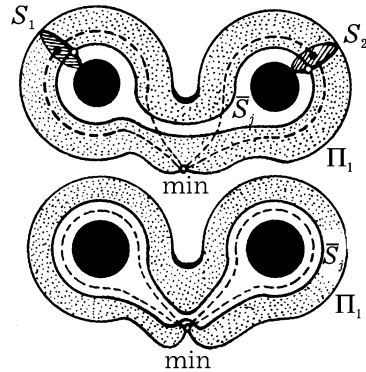


Рис. 114

На рис. 113 показан комплекс  $\Pi_1$ , окружности, участвующие в доказательстве теоремы, и стягивание  $\Pi_1$  на букет  $\bigvee_{i=1}^g D_i^*$ . На рис. 114 показан пример  $\Pi_1$  рода 2 и окружность  $\bar{S}_j$ , образующая слово  $W_j = S_1 S_2$  при своих пересечениях с окружностями  $S_1$  и  $S_2$ . На рис. 114 показана также деформация окружности  $\bar{S}_j$  на букет двух окружностей  $D_1^* \vee D_2^*$ .

При этой деформации  $\bar{S}_j$  реализует, очевидно, элемент свободной группы  $F(S_1, S_2)$ , равный  $S_1 \cdot S_2$ , т. е. совпадающий со словом  $W_j = S_1 \cdot S_2$ . Применим теперь теорему 8.1 к изучению конкретной сети, предъявленной нами выше. В этом случае род  $\Pi_1$  равен двум, поэтому мы получаем два слова-элемента  $W_1$  и  $W_2$  в свободной группе  $F_2(S_1, S_2)$ . Для простоты обозначим образующие  $S_1$  и  $S_2$  через  $a, b$ . Тогда окружности  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_2$  индекса 2 определяют следующие элементы в группе  $F_2(a, b)$  (см. рис. 111):  $aba^{-1}ba = W_1, b^{-1}ab^4a = W_2$ . Следовательно,  $F_2(a, b)/N(W_1, W_2) = \pi_1(M^3)$ . Докажем, что эта группа не является единичной (запись группы мультипликативна). Для этого преобразуем соотношения  $W_1, W_2$  в группе  $F_2$  к более простому виду. Пользуясь тем, что соотношения эти определены с точностью до сопряжения на произвольные элементы группы  $F_2$ , получаем цепочку эквивалентных соотношений:  $W_1 = aba^{-1}ba \sim ba^{-1}ba^2 \sim a^{-2}b^{-1}ab^{-1} \sim a^{-2}cac$ , где  $c = b^{-1}$ , далее  $W_2 = b^{-1}ab^4a \sim b^4ab^{-1}a \sim c^{-4}aca$ . Эти соотношения можно переписать еще и так:  $a^2 = cac, c^4 = aca$ . Итак,  $\pi_1(M^3) = F_2(a, c)/N(a^2 = cac, c^4 = aca)$ . Отсюда следует, что в группе  $\pi_1(M^3)$  между образующими  $a, c$  имеется соотношение  $c^5 = a^3$ . В самом деле,  $c^5 = caca = (ca)^2, a^3 = caca = (ca)^2 = c^5$ . Но эта группа известна в теории групп симметрий правильных многогранников. Полученные нами соотношения выполняются в группе икосаэдра, если в качестве элемента  $c$  взять вращение вокруг какой-нибудь вершины икосаэдра на угол  $2\pi/5$ , а в качестве  $a$  взять вращение в том же направлении на угол  $2\pi/3$  вокруг центра прилегающего к этой вершине треугольника. Отсюда следует, что группа  $\pi_1(M^3)$  заведомо нетривиальна, поскольку группа икосаэдра отлична от единичной.

**Задача.** Докажите, что  $\pi_1(M^3)$  есть группа 120-го порядка.

Итак, мы доказали, что многообразие  $M^3$  гомотопически не эквивалентно сфере. С другой стороны, оказывается, что  $H_1(M^3, \mathbb{Z}) = 0$ . В самом деле, известно (см., например, [1]), что для любого клеточного комплекса  $H_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ , где через  $[\pi_1, \pi_1]$  обозначен коммутант группы  $\pi_1$ . В нашем примере, следовательно, для подсчета группы  $H_1(M^3, \mathbb{Z})$  нужно считать образующие  $a, b$  коммутирующими (что эквивалентно факторизации группы по ее коммутанту), после чего, переходя для удобства к аддитивной записи группы и ее соотношений, мы получаем  $W_1^* = a + b - a + b + a = a + 2b, W_2^* = -b + a + 4b + a = 2a + 3b$ . Следовательно, элементы  $W_1^*, W_2^*$  определяют следующее целочислен-

ное преобразование абелевой группы  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Поскольку определитель этого преобразования равен  $-1$ , то элементы  $W_1^*, W_2^*$  порождают всю группу  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , что и требовалось доказать. Таким образом,  $\pi_1(M^3)$  является простой группой, совпадает со своим коммутантом, и  $M^3$  является гомологической сферой. Теорема полностью доказана. ■

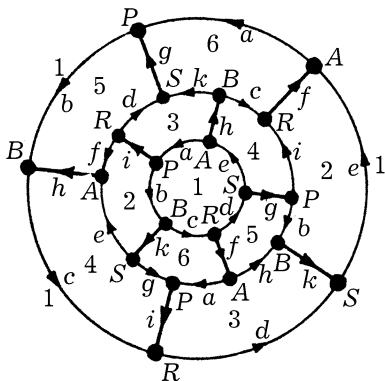


Рис. 115

Предъявленное нами в терминах сетей многообразие  $M^3$  оказывается диффеоморфным так называемой «сфере Пуанкаре», определение которой обычно дается в других терминах. Это многообразие получается из додекаэдра при отождествлении противоположных его граней — пятиугольников, повернутых друг относительно друга на угол  $\pi/5$ . На рис. 115 показан граф додекаэдра с требуемыми отождествлениями его граней. Оставляем читателю в качестве полезного упражнения сопоставление этого многообразия с тем, которое было изучено нами выше.

### 2. Гомотопические сферы

Итак, равенства нулю одномерной группы гомологий  $H$  недостаточно для того, чтобы многообразие  $M^3$  было диффеоморфно стандартной сфере. Поэтому следующей естественной гипотезой является дальнейшее усиление требований на топологию многообразия.

*Гипотеза Пуанкаре. Любое трехмерное гладкое замкнутое компактное связное и односвязное (!) многообразие диффеоморфно стандартной сфере.*

Теперь мы предполагаем равенство нулю группы  $\pi_1(M^3)$ , что является, очевидно, усилением первоначального требования. Так как  $\pi_1 = 0$ , то такое многообразие автоматически ориентируемо, в противном случае группа  $\pi_1$  содержала бы подгруппу индекса 2. Поскольку равенство нулю группы  $\pi_1$  влечет за собой равенство нулю группы  $H_1$ , то любое такое многообразие является гомологической сферой (см. 8.1). Имеет место и более сильное

**Предложение 8.3.** *Любое трехмерное гладкое замкнутое компак-*