ное связное и односвязное многообразие гомотопически эквивалентно стандартной сфере.

Доказательство.

Поскольку $H_1 = H_2 = 0$ и M односвязно, то в силу теоремы Гуревича (см., например, [3, с. 153]) мы имеем $\pi_1 = \pi_2 = 0$, $\pi_3(M^3) = H_3(M^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Рассмотрим M^3 как клеточный комплекс и построим непрерывное отображение $f\colon M^3 \to S^3$, стянув в точку двумерный остов M^3. Отображение f индуцирует изоморфизм гомотопических групп и является гомотопической эквивалентностью.

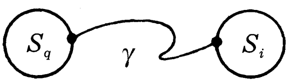

Рис. 116

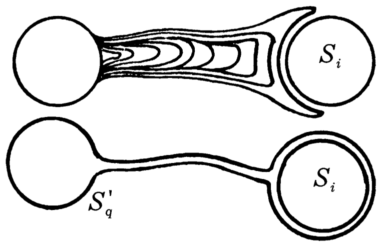

Рис. 117

До сих пор неизвестно, является ли любая трехмерная гомотопическая сфера (т. е. многообразие, гомотопически эквивалентное трехмерной сфере) стандартной сферой. (Известно, что гомотопические сферы размерностей $n \geqslant 4$ гомеоморфны стандартным сферам.) Возвращаясь к вопросу об алгоритмическом распознавании кодов (сетей, диаграмм Хегора) стандартной сферы в множестве всех кодов всех трехмерных многообразий, сделаем одно дополнительное замечание. Дело в том, что множество всех диаграмм Хегора сферы S^3 можно все-таки описать, правда, недостаточно конструктивно (что и препятствует распознаванию). Для этого рассмотрим элементарные операции над сетями α. Пусть $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$ и S_i, S_q — две окружности индекса 1. Выберем на них по точке и соединим эти точки гладким отрезком γ, не пересекающимся с другими окружностями индекса 1 (рис. 116). После этого заменим пару S_i, S_q новой парой S_i, S'_q, где $S_i = S_i$, а новая окружность S'_q получается так, как это показано на рис. 117. Эту операцию $(S_i, S_q) \to (S_i, S'_q)$ назовем элементарной операцией индекса 1. Точно так же определяются операции индекса 2. Оказывается, в результате этих операций снова получаются сети, т. е. диаграммы

Хегора, задающие то же многообразие, которое задавалось исходной сетью α. Оказывается, что любой код (сеть, диаграмма Хегора) стандартной трехмерной сферы может быть получен из простейшей сети сферы S^3 (для некоторого рода g), показанной на рис. 107, некоторой последовательностью операций индекса 1 и индекса 2.

Внешняя простота этих операций тем не менее обманчива. Уже простые примеры показывают, насколько сильно запутываются сети сферы S^3 после применения описанных операций. Решение алгоритмической проблемы Пуанкаре зависит от того, удастся или нет найти такое «распознаваемое» свойство сетей сферы, которое сохранялось бы при любых последовательностях операций индекса 1 и 2. Оказывается, для сетей рода 2, задающих стандартную сферу, такое легко распознаваемое свойство существует. Володиным и Фоменко в [26] была сформулирована гипотеза: если сеть сферы отлична от стандартной минимальной сети, то хотя бы один из графов $W(\alpha)$ и $\overline{W}(\alpha)$ содержит разбивающую вершину, т. е. такую вершину, выбрасывание которой разбивает граф в объединение по крайней мере двух компонент связности. Именно в этом смысле разбивающая вершина «разбивает» граф по крайней мере на два связных куска. Если эта гипотеза верна для сетей какого-то фиксированного рода g, то тогда мы получаем очень простой и красивый алгоритм распознавания сетей стандартной сферы. Берем исследуемую сеть и смотрим, есть ли в графах $W(\alpha)$ и $\overline{W}(\alpha)$ хотя бы одна разбивающая вершина. Если таковой нет, то мы сразу же получаем, что многообразие, соответствующее этой сети, не гомеоморфно стандартной сфере. Если же разбивающая вершина есть, то, применяя к сети некоторую упрощающую операцию (существенно использующую наличие разбивающей вершины), мы упрощаем исходную сеть, переходя к новой сети, соответствующей тому же многообразию, но имеющей меньшее число ребер (в терминах ассоциированных с сетью графов) (детали см. в [26, 27]). Таким образом, повторяя эту процедуру нужное количество раз, мы либо остановимся на простейшей минимальной сети, описывающей стандартную сферу (и тогда исходная сеть определяла сферу, поскольку операции упрощения не меняют исходное многообразие), либо остановимся на некоторой сети, которая не имеет ни одной разбивающей вершины (на обоих графах) и отлична от минимальной сети сферы. В этом последнем случае многообразие не гомеоморфно сфере. Для сетей рода 3 и выше сформулированная гипотеза оказалась неверной [28], [30].

Для сетей рода 2 был проведен обширный вычислительный эксперимент на ЭВМ, в результате которого было обнаружено, что все 10^7 сетей рода два, построенных ЭВМ и отвечающих стандартной сфере, действительно имеют разбивающую (хотя бы на одном из графов). Ранее ЭВМ была применена в [26] для 10^6 сетей (без ограничения на род). Наконец, в [29] существование разбивающей вершины для сетей рода 2 было доказано в полном объеме. Таким образом, для сетей рода 2 указанный алгоритм эффективно действует.

§ 9. Об алгоритмической классификации многообразий

1. Фундаментальные группы трехмерных многообразий

Фундаментальные группы двумерных многообразий были фактически уже описаны нами ранее. Оказалось, что этих групп «достаточно мало», все они задаются в явном виде простым набором образующих и соотношений. В трехмерном случае, как мы уже видели, появляются принципиально новые группы, являющиеся группами $\pi_1(M^3)$ (см. § 8). Тем не менее по-прежнему есть такие конечно-порожденные группы, которые не могут быть фундаментальными группами трехмерных многообразий.

Предложение 9.1. *Группа $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ не может быть фундаментальной группой замкнутого связного компактного трехмерного многообразия.*

Доказательство.

Допустим противное, пусть существует M^3 такое, что $\pi_1(M^3) = \mathbb{Z}^4$. Фундаментальная группа π_1 задается набором образующих $a_1, \dots, a_p$ и соотношений $W_1, \dots, W_q$, геометрический смысл которых был выяснен в § 8. Образующие $a_1, \dots, a_p$ задаются левосторонними сепаратрисными дисками точек индекса 1, а соотношения $W_1, \dots, W_q$ — левосторонними двумерными дисками точек индекса 2. Так как согласно теореме 7.1 на M^3 существует функция Морса, имеющая только один минимум, один максимум и равное число критических точек индекса 1 и индекса 2, то существует такое задание группы $\pi_1(M^3)$, в котором число образующих равно числу соотношений. Итак, пусть $\pi_1(M^3) = F_g(a_1, \dots, a_g)/N(W_1, \dots, W_g)$, где g — род поверхности $f_{1/2}$. Вложим M^3 в клеточный комплекс $K(\mathbb{Z}^4, 1)$ [3], т. е. в такой комплекс, что $\pi_1(K(\mathbb{Z}^4,1)) = \mathbb{Z}^4$, $\pi_i(K(\mathbb{Z}^4,1)) = 0$ при $i > 1$. Для этого достаточно «заклеить» все группы $\pi_i(M)$ при $i \geqslant 2$ путем приклейки клеток размерностей, не меньших, чем три. В частности, одномерный и двумерный остовы M не меняются. Поскольку любые два пространства типа $K(\pi, 1)$ при одной группе π слабо гомотопически эквивалентны [3], то можно считать, что $K(\mathbb{Z}^4, 1)$ гомотопически эквивалентно тору T^4. Итак, для тора T^4 мы обнаружили такое клеточное разбиение с одной вершиной, что алгебраический комплекс (над $\mathbb{R}$) цепей этого разбиения имеет вид $\ldots \xrightarrow{\partial_2} P_2 \xrightarrow{\partial_1} P_1 \xrightarrow{\partial_0} 0$, где $\dim_{\mathbb{R}} P_1 = g$ (роду $f_{1/2}$). Рассмотрим $H_1(T^4, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$. Так как $H_1 = \operatorname{Ker}\partial_0/\operatorname{Im}\partial_1 = P_1/\operatorname{Im}\partial_1$, то $\operatorname{codim}\operatorname{Im}\partial_1 = 4$. Так как $\operatorname{Im}\partial_1 = P_2/\operatorname{Ker}\partial_1$, то оператор ∂_1 отличен от нуля на $g-4$ линейно независимых векторах в группе P_2, следовательно, $\dim\operatorname{Ker}\partial_1 = 4$. Следовательно, $\dim H_2 \leqslant 4$, так как $H_2 = \operatorname{Ker}\partial_1/\operatorname{Im}\partial_2$. Но, с другой стороны, $H_2(T^4, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^6$. Полученное противоречие доказывает утверждение. ■

Задача. Найдите все абелевы группы, которые являются фундаментальными группами трехмерных замкнутых компактных связных многообразий ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$).

Рассмотрим класс H всех конечно-порожденных групп, т. е. задающихся конечным набором образующих и соотношений. Обозначим через Q подкласс тех групп, которые имеют вид $\pi_1(M^3)$ для некоторого многообразия M^3. Как мы видели, $Q \neq H$, так как, например, $\mathbb{Z}^4 \notin Q$. Оказывается, подкласс $Q \subset H$ алгоритмически нераспознаваем в классе H, т. е. не существует такого алгоритма, который, действуя по единой программе, сообщал бы, задает ли поданный на его «вход» набор образующих и соотношений группу из класса Q или нет. Теорема эта нетривиальна и ее доказательство мы опускаем.

2. Фундаментальные группы четырехмерных многообразий

Теорема 9.1. *Любая конечно-порожденная группа может быть представлена в виде фундаментальной группы некоторого четырехмерного гладкого компактного связного замкнутого многообразия.*

Доказательство.

Пусть группа G задается образующими $a_1, \ldots, a_n$ и соотношениями $W_1, \ldots, W_k$, где $n, k < \infty$, т. е. $G = F_n(a_1, \ldots, a_n)/N(W_1, \ldots, W_k)$. Рассмотрим сферу S^4 и приклеим к ней n ручек индекса 1, т. е. выполним n перестроек индекса 1 (см. § 3, 6). Получим многообразие M^4. Ясно, что $F_n(a_1, \ldots, a_n) = \pi_1(M^4)$, где образующие $a_1, \ldots, a_n$ геометрически реализованы в M^4 при помощи окружностей S_i, порожденных «осями» ручек индекса 1 (рис. 118). Следуя схеме п. 1 § 8, реализуем каждый элемент (слово) W_j гладко вложенной в M^4 окружностью $\overline{S}_j$ так, чтобы при последовательном обходе по этой окружности пересечения с ручками образовывали бы слово W_j. При этом можно считать, что окружности, реализующие слова $W_1, \ldots, W_k$, не пересекаются. Рассмотрим окружность $\overline{S}_j$, и пусть U — ее достаточно малая трубчатая окрестность. Мы утверждаем, что U является прямым произведением $\overline{S}_j \times D^3$. В самом деле, поскольку U является расслоением над окружностью со слоем D^3, то оно может быть только: а) прямым произведением, б) неориентируемым многообразием с краем. Но случай б) не реализуется, поскольку многообразие M^4 очевидно, ориентируемо. Поэтому мы можем произвести по окружности $\overline{S}_j$, перестройку индекса 2 (см. § 6). Другими словами, рассмотрим многообразие $S^2 \times D^2$ и, выбросив окрестность $U = \overline{S}_j \times D^3$, вклеим вместо нее $S^2 \times D^2$ по отождествлению краев: $\partial(S^2 \times D^2) = S^2 \times S^1 = \partial U = \partial(\overline{S}_j \times D^3)$. Выполнив эту перестройку по всем окружностям $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_k$, мы получаем новое многообразие Q^4, фундаментальная группа которого равна группе G, поскольку, приклеив ручки индекса 2 по всем окружностям $\{\overline{S}_j\}$, мы заклеиваем в группе $F_n(a_1, \ldots, a_n)$ элементы $W_1, \ldots, W_k$, приравняв их нулю (единице), что и приводит нас к группе G. Теорема доказана. ■

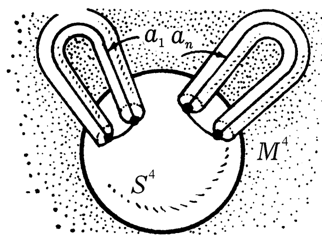

Рис. 118

Отметим, что это рассуждение не проходит в размерности три, поскольку здесь мы должны были бы, производя, перестройку индекса 2, вклеивать вместо окрестности $U = \overline{S}_j \times D^2$ окружности $\overline{S}_j$ многообразие (ручку) $S^1 \times D^2$ по отождествлению границ: $\partial U = \overline{S}_j \times S^1 = \partial(S^1 \times D^2) = T^2$ (тор). Ясно, что, уничтожая элемент W_j, реализованный окружностью $\overline{S}_j$, мы вместо него добавляем новый, вообще говоря, нетривиальный элемент, реализованный другой окружностью — образующей на торе, т. е. вводим новые образующие, не предусмотренные представлением группы G. И действительно, как мы уже видели, некоторые группы G не являются фундаментальными группами трехмерных многообразий. Ясно, что любая конечно-порожденная группа G реализуется при любом $n \geqslant 4$ как фундаментальная группа некоторого многообразия M^n.

3. О невозможности классификации гладких многообразий в размерностях, больших, чем три

Каждое гладкое компактное многообразие допускает триангуляцию, т. е. представление в виде симплициального комплекса. Следовательно, составив таблицу, в которой перечислены все эти симплексы, все их грани и коэффициенты инцидентностей, мы можем задать многообразие этой таблицей, рассматривая ее как код многообразия. Возникает задача алгоритмической классификации многообразий данной размерности: существует ли алгоритм, действующий по единой программе и отвечающий на вопрос, определяют ли два произвольных кода диффеоморфные (гомеоморфные) многообразия или нет [23, 24].

Теорема 9.2 ([23]). *Не существует алгоритма, определенного на множестве кодов всех четырехмерных многообразий (заданных, например, своими симплициальными разбиениями) и отвечающего на вопрос, определяют ли два любые кода, поданные на его «вход», диффеоморфные многообразия или нет.*

Доказательство.

Мы сошлемся здесь на некоторые чисто алгебраические результаты, доказательство которых выходит далеко за рамки настоящей книги. Если группа задана в виде таблицы, перечисляющей образующие и соотношения, то будем говорить, что задано копредставление группы. Предварительно конструируется конечно-порожденная группа G_0, заданная образующими и набором соотношений, в которой алгоритмически неразрешима проблема тождества слов, т. е. не существует алгоритма, отвечающего на вопрос: определяют ли два слова, поданные на «вход» алгоритма, один и тот же элемент в группе G_0? Дело в том, что поскольку элементы группы G_0 заданы в виде классов смежности по нормальному делителю, порожденному словами-соотношениями, то один и тот же элемент записывается бесконечным множеством способов, в связи с чем и возникает проблема «тождества слов». Копредставление этой интересной группы имеет 10 образующих a_i, и 29 соотношений R_j. В записи G_0 мы сначала перечислим образующие, а потом укажем все соотношения. $G_0 = \{$образующие : s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, c, d, e, k, t; соотношения: $d^{10}s_i = s_id$; $es_i = s_ie^{10}$, $s_ic = cs_i$; $i = 1, 2, \ldots, 5$; $ds_1s_3ec =$

$= cds_3s_1e$; $d^2s_1s_4e^2c = cd^2s_4s_1e^2$; $d^3s_2s_3e^3c = cd^3s_3s_2e^3$; $d^4s_2s_4e^4c = cd^4s_4s_2e^4$; $d^5s_5s_3s_1e^5c = cd^5s_3s_5e^5$; $d^6s_5s_4s_2e^6c = cd^6s_4s_5e^6$; $d^7s_3s_4s_3s_1e^7c = cd^7s_3s_4s_3s_1s_5e^7$; $d^8s_3s_1^3e^8c = cd^8s_1^3e^8$; $d^9s_4s_1^3e^9c = cd^9s_1^3e^9$; $ct = tc$; $dt = td$; $ck = kc$; $ek = ke$; $s_1^{-3}ts_1^3k = ks_1^{-3}ts_1\} = \{a_i,\, R_j\}$.

Из указанного копредставления этой группы конструируется счетная последовательность копредставлений групп, в которой алгоритмически неразрешима проблема тривиальности группы. Пусть $G_0 = \{a_i,\, R_j\}$ — описанная выше группа. Лексикографически упорядочим слова в алфавите

$$(a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \ldots, a_{10}, a_{10}^{-1}),$$

т. е. составим список

$$a_1, a_1^{-1}, \ldots, a_{10}^{-1};\ a_1a_1^{-1}, a_1a_2, \ldots, a_1a_{10}^{-1}, a_1^{-1}a_1, \ldots$$

Обозначим через ω_k k-е слово в этом списке. Обозначим далее через G_k, где $k \geqslant 1$, группу, заданную образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, a_{11}, t, c, s, b, d, u$ и соотношениями:

$$R_1 = 0,\ R_2,\ \ldots,\ R_{29} = 0;$$
$$u = a_{11}\omega_k a_{11}^{-1}\omega_k; \quad t^2u = ut; \quad c^2t = tc;$$
$$s^2u = us; \quad b^2s = sb;$$
$$a_ib^icb^{-i} = d^icd^{-i}; \quad i = 1, 2, \ldots, 11;$$
$$b^{12}cbc^{-1}b^{-12} = d^{-12}cdc^{-1}d^{12}.$$

В этом копредставлении группы G_k мы имеем 17 образующих и 46 соотношений. Имеет место важное утверждение: не существует алгоритма, определенного на этом счетном множестве копредставлений групп и отвечающего на вопрос, задает ли копредставление группы, поданное на его «вход», тривиальную (единичную) группу или нет. Другими словами, мы не можем алгоритмически распознать в последовательности групп G_k единичные группы.

Возвратимся к задаче классификации многообразий. Опираясь на теорему 9.1, построим последовательность четырехмерных многообразий M_k^4, для которых $\pi_1(M_k^4) = G_k$. Обозначим через p число образующих, а через q число соотношений в группе G_k. В действительности, $p = 17$, $q = 46$. Числа p и q не зависят от номера k. Напомним, что каждое многообразие M_k^4 имеет вид $S^4 + (p,1) + (q,2)$, где символом $(p,1)$ мы обозначили p перестроек индекса 1, а символом $(q,2)$ — q перестроек индекса 2. Построим новые четырехмерные многообразия $N_k^4 = S^4 + (p,1) + (q,2) + (p,2) = M_k^4 + (p,2)$ т. е. приклеим к M_k^4 ручки индекса 2 в количестве p, при этом не будем задевать приклеенных ранее ручек. Последнее условие означает, в частности, что мы не меняем фундаментальной группы многообразия т. е. $\pi_1(N_k^4) = \pi_1(M_k^4) = G_k$.

Лемма 9.1. *Если G_k — тривиальная группа, то многообразие N_k^4 диффеоморфно стандартному гладкому односвязному многообразию $M_0^4 = S^4 + (q,2)$, т. е. четырехмерной сфере S^4, к которой стандартным образом приклеено q ручек индекса 2.*

Доказательство.

Пусть $\pi_1(N_k^4) = 0$. Построенные нами многообразия N_k^4, как и M_k^4, обладают важным свойством: они являются краями некоторых пятимерных гладких многообразий. Это сразу вытекает из п. 4 § 6, где было доказано, что операция перестройки Морса индекса λ реализуется как операция взятия края у многообразия на единицу большей размерности, заключенного между двумя поверхностями уровня функции f, имеющей в этом слое одну критическую точку индекса λ. Используя тривиальность фундаментальной группы, мы можем заклеить все ее p образующих двумерными дисками.

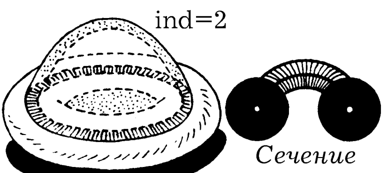

Рис. 119

Опуская подробности, отметим, что, используя так называемую стабилизацию функции Морса и тот факт, что образующие группы π_1 реализованы в виде «осей» ручек индекса 1, сдвигая с места ручки $(p,2)$ и наползая ими на эти образующие, можно заклеить (уничтожить) все образующие группы π_1. При этом мы используем тот факт, что ручки индексов 1 и 2 могут взаимно уничтожать друг друга, если подошва ручки индекса 2 приклеена к оси ручки индекса 1 (а это можно сделать, используя тривиальность группы π_1). Это взаимное уничтожение двух ручек показано на рис. 119. Лемма доказана. ■

Возвращаясь к доказательству теоремы 9.2, допустим противное: пусть существует классификационный алгоритм, позволяющий сравнивать между собой различные коды четырехмерных многообразий и отвечающий на вопрос, диффеоморфны ли соответствующие многообразия или нет. Ограничим этот алгоритм на бесконечную серию построенных выше многообразий $M_0^4 = S^4 + (q, 2)$, $N_1^4, N_2^4, N_3^4, \ldots$ Взяв произвольную группу G_k из предъявленной выше серии, мы можем затем с помощью алгоритма распознавания сравнить соответствующее ей многообразие N_k^4 с многообразием M_0^4. Если они окажутся диффеоморфными, то группа G_k тривиальна, так как $\pi_1(M_0^4) = 0$. Если же алгоритм сообщит, что N_k^4 и M_0^4 не диффеоморфны, то в силу леммы 9.1 группа $G_k = \pi_1(N_k^3)$ нетривиальна, в противном случае мы получили бы диффеоморфизм: $N_k^4 = M_0^4$. Следовательно, опираясь на топологический алгоритм распознавания (классификации), мы получили бы алгоритм, позволяющий распознавать в серии групп $\{G_k\}$ (точнее, их копредставлений) тривиальную группу, что невозможно в силу построения этих копредставлений. Теорема 9.2 доказана.

В трехмерном случае эта теорема не имеет пока своего аналога, так как неясна возможность реализации серии групп типа G_k в виде фундаментальных групп трехмерных многообразий. Отметим также следующее обстоятельство. Предположим, что имеет место утверждение: серия групп G_k (или какая-либо аналогичная ей по свойствам серия) реализуется в виде фундаментальных групп трехмерных многообразий, т. е. $G_k = \pi_1(N_k^3)$. Какое утверждение соответствует тогда доказанной выше лемме 9.1? Так как любое трехмерное компактное замкнутое связное и односвязное многообразие гомотопически эквивалентно стандартной сфере (см. § 8), то трехмерным аналогом леммы 9.1 могла бы быть следующая лемма: если G_k — тривиальная группа, то многообразие N_k^3 диффеоморфно стандартной трехмерной сфере.

Глава 4
Симметрические пространства

§ 10. Основные свойства симметрических пространств, их модели и группы изометрии

1. Определение симметрических пространств

Определение 10.1. Связное риманово многообразие V называется римановым симметрическим пространством, если для каждой точки $p \in V$ существует изометрия $s_p\colon V \to V$, оставляющая точку p на месте и переворачивающая проходящие через точку p геодезические. Это означает, что если γ — геодезическая такая, что $\gamma(0) = p$, то $s_p\gamma(t) = \gamma(-t)$.

Симметрическое пространство можно определить еще и так: для каждой точки $p \in V$ существует инволютивная изометрия s_p (т. е. квадрат которой — тождественное преобразование), отличная от тождественной, для которой точка p является изолированной неподвижной точкой.

2. Группы Ли как симметрические пространства

В качестве первого примера возьмем группы Ли. Мы будем рассматривать в основном компактные группы Ли $\mathfrak{G}$; алгебру Ли будем обозначать G. Будем считать, что компактная группа $\mathfrak{G}$ является замкнутой подгруппой в ортогональной группе SO_N или в специальной унитарной группе SU_N для некоторого достаточно большого $N < \infty$. Это облегчит многие построения и не ограничит общности, так как любая компактная группа допускает такое представление (мы не будем доказывать этот факт). Фиксируем на компактной группе Ли $\mathfrak{G}$ двусторонне инвариантную (биинвариантную) риманову метрику. Доказательство существования такой метрики см., например, в [1]. Напомним также явные формулы, задающие такую метрику. Пусть группа $\mathfrak{G}$ вложена в SO_N. Биинвариантная метрика на $\mathfrak{G}$ вводится как ограничение биинвариантной метрики группы SO_N

на подгруппу $\mathfrak{G}$. Рассмотрим стандартное представление SO_N в виде $(N \times N)$-матриц A таких, что $A^{-1} = A^T$. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^{N^2}$ всех вещественных $N \times N$-матриц и введем в нем скалярное произведение по формуле $\langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}(A \cdot B^T)$, где A, $B \in \mathbb{R}^{N^2}$ — две произвольные матрицы, B^T — транспонированная матрица. Ясно, что если $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$, то $\langle A, B\rangle = \sum\limits_{i,j} A_{ij}B_{ij}$ является евклидовым скалярным произведением. Очевидное свойство этого произведения — его инвариантность относительно преобразований вида $X \to CXC^{-1}$, где $X \in \mathbb{R}^{N^2}$, $C \in SO_N$, $\mathrm{Sp}(CXC^{-1}CY^TC^{-1}) = \mathrm{Sp}\,XY^T$. Преобразование $X \to CXC^{-1}$ иногда обозначается Ad_C. Группа SO_N реализована как замкнутое компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^{N^2}$. Так как для любого $g \in SO_N$ выполнено тождество $gg^T = E$ (единичная матрица), то $|g|^2 = \langle g, g\rangle = N = \mathrm{Sp}\,gg^T$, т. е. подмногообразие SO_N вложено в сферу S^{N^2-1} радиуса $\sqrt{N}$ с центром в O. Зададим на SO_N метрику путем ограничения объемлющей евклидовой метрики на подмногообразие SO_N (рис. 120).

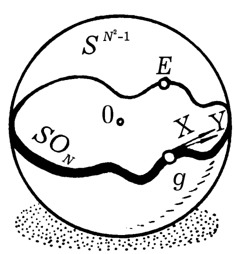

Рис. 120

Лемма 10.1. *Полученная риманова метрика на пространстве матриц $\mathbb{R}^{N^2}$ инвариантна как при левых, так и при правых сдвигах из группы SO_N.*

Доказательство.

Пусть $X = gA$, $Y = gB$. Тогда $\langle X, Y\rangle = \langle gA, gB\rangle = \mathrm{Sp}\,gAB^Tg^T = \mathrm{Sp}\,AB^T$, так как $g^T = g^{-1}$. Лемма доказана. ■

Биинвариантность полученной метрики на подгруппах $\mathfrak{G} \subset SO_N$ эквивалентна инвариантности скалярного произведения $\langle\, ,\, \rangle$ в единице $E \subset \mathfrak{G}$ относительно внутренних автоморфизмов $X \to gXg^{-1}$, $X \in G = T_E\mathfrak{G}$, $g \in \mathfrak{G}$.

Утверждение 10.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — компактная группа Ли с биинвариантной метрикой. Тогда $\mathfrak{G}$ — симметрическое пространство. Инволюция $s_g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ задается формулой $s_g(x) = gx^{-1}g$, при этом $s_g(g) = g$.*

Доказательство.

Рассмотрим гладкое отображение $\nu\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, $\nu(x) = x^{-1}$, тогда $d\nu\colon T_E\mathfrak{G} \to T_E\mathfrak{G}$ переворачивает касательные векторы к $\mathfrak{G}$ в точке E, в частности $d\nu$ — изометрия пространства G. Так как $\nu = R_{g^{-1}}\nu L_{g^{-1}}$, где через R_g и L_g обозначены правые и левые сдвиги соответственно, то $(d\nu)_x\colon T_x\mathfrak{G} \to T_{x^{-1}}\mathfrak{G}$ также изометрия. Так как $s_g = R_g s_E R_g^{-1}$, то s_g — изометрия, переворачивающая геодезические в точке g. Утверждение доказано. ■

Легко проверить, что однопараметрическими подгруппами в $\mathfrak{G}$ являются геодезические, проходящие через единицу E, и только они. В самом деле, если γ — геодезическая в $\mathfrak{G}$, $E = \gamma(0)$, $q = \gamma(c)$, то $s_q s_E\gamma(t) = \gamma(t+2c)$ (рис. 121). Так как $s_g(x) = gx^{-1}g$, то $s_q s_E(x) = \gamma(c)x\gamma(c) = qxq$; отсюда

$$\gamma(c)\gamma(t)\gamma(c) = \gamma(t+2c),$$

где $x = \gamma(t)$. Полагая $t = 0$, получаем $\gamma(n\cdot c) = \gamma(c)^n$ для любого целого n. Если отношение c_1/c_2 рационально, т.е. $c_1 = n_1c$, $c_2 = n_2c$ при некотором c и $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, то

$$\gamma(c_1+c_2) = \gamma((n_1+n_2)c) = \gamma(c)^{n_1+n_2} = \gamma(c_1)\cdot\gamma(c_2).$$

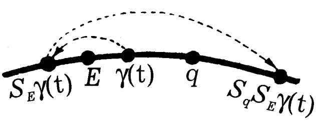

Рис. 121

Используя соображения непрерывности, получаем, что $\gamma(c_1)\cdot\gamma(c_2) = \gamma(c_1+c_2)$ уже при произвольных c_1 и c_2, т.е. γ — гомоморфизм, а потому однопараметрическая подгруппа. Поскольку как геодезическая, так и однопараметрическая подгруппа однозначно задается касательным вектором в единице, то утверждение доказано. ■

3. Свойства тензора кривизны

Наличие на симметрических пространствах геодезических симметрий накладывает жесткие ограничения на дифференциально-геометрическую структуру пространства. Поясним это на примере групп Ли.

Предложение 10.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — компактная группа Ли с биинвариантной метрикой (через $\langle\,,\,\rangle$ обозначим соответствующее скалярное произведение); пусть X, Y, Z, W — левоинвариантные векторные поля на группе. Тогда выполнены тождества (где через R обозначен тензор римановой кривизны):*

1) $\langle [X, Y], Z\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle$,
2) $R(X,Y)Z = 1/4[[X,Y],Z]$,
3) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = 1/4\langle [X,Y],[Z,W]\rangle$.

Доказательство.

Рассмотрим на $\mathfrak{G}$ риманову симметричную связность ∇, порожденную биинвариантной метрикой. Через $\nabla_X Y$ обозначим ковариантную производную векторного поля Y по направлению векторного поля X [2]. Тогда для любого левоинвариантного поля X на группе выполнено тождество $\nabla_X X \equiv 0$. В самом деле, интегральные траектории левоинвариантного поля являются левыми сдвигами однопараметрических подгрупп, а потому — геодезическими, т. е. $\nabla_X X = 0$. Следовательно, $0 = \nabla_{X+Y}(X+Y) = \nabla_X X + \nabla_Y Y + \nabla_X Y + \nabla_Y X$. Отсюда $\nabla_X Y + \nabla_Y X = 0$. С другой стороны, из определения ковариантной производной легко следует, что $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$. Сопоставляя последние два равенства, получаем $2\nabla_X Y = [X,Y]$. Из свойств ковариантной производной имеем $Y\langle X,Z\rangle = \nabla_Y\langle X,Z\rangle = \langle\nabla_Y X,Z\rangle + {}+\langle X,\nabla_Y Z\rangle$. Так как поля X и Z левоинвариантны, то $\langle X,Z\rangle = {}= \mathrm{const}$ на $\mathfrak{G}$, т. е. $Y\langle X,Z\rangle = 0$. Отсюда $\langle[Y,X],Z\rangle + \langle X,[Y,Z]\rangle = {}= 0$, т. е. $\langle X,[Y,Z]\rangle = \langle[X,Y],Z\rangle$. Соотношение 1) доказано. Согласно определению $R(X,Y)Z$ имеем $R(X,Y)Z = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + {}+\nabla_{[X,Y]}Z$. Так как $\nabla_X Y = 1/2[X,Y]$, то $R(X,Y)Z = -1/4[X,[Y,Z]] + {}+1/4[Y,[X,Z]] + 1/2[[X,Y],Z]$. Далее, используя тождество Якоби, получаем $R(X,Y)Z = 1/4[[X,Y],Z]$. Предложение доказано. ■

Напомним, что если M^n — риманово многообразие, то кривизной по двумерному направлению X, Y называется выражение $\langle R(X,Y)X,Y\rangle$. Если $M^n = \mathfrak{G}$ — группа Ли, то из доказанного предложения следует, что $\langle R(X,Y)X,Y\rangle = 1/4\langle[X,Y],[X,Y]\rangle = {}= 1/4\|[X,Y]\|^2 \geqslant 0$. Итак, для компактных групп Ли кривизна по любому двумерному направлению всегда неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда это направление «коммутативно», т. е. $[X,Y]=0$.

4. Инволютивные автоморфизмы и связанные с ними симметрические пространства

Группы Ли не исчерпывают собой список симметрических пространств. Так, например, стандартная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является симметрическим пространством, хотя сфера S^n и не является группой при $n \neq 1, 3$. Пусть $\mathfrak{G}$ — связная односвязная компактная группа Ли и $\sigma\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ — инволютивный автоморфизм группы. Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество неподвижных точек автоморфизма σ в группе. Ясно, что $\mathfrak{H}$ — замкнутая компактная подгруппа в группе $\mathfrak{G}$.

Алгебра Ли G распадается в прямую сумму двух плоскостей: $G = H + B$, где $H = \{X \in G | d\sigma(X) = X\}$, $B = \{X \in G | d\sigma(X) = -X\}$. Так как $(d\sigma)^2 = 1_G$ (тождественное отображение алгебры Ли в себя), то все собственные числа $d\sigma$ равны ± 1. Так как σ — автоморфизм группы, то $d\sigma$ — автоморфизм алгебры Ли, т.е. $d\sigma[X, Y] = [d\sigma X, d\sigma Y]$. Из определения H следует, что H — подалгебра в G и что она является алгеброй Ли подгруппы $\mathfrak{H}$.

Можно доказать, что подгруппа $\mathfrak{H}$ (множество неподвижных точек инволюции на односвязной связной компактной группе) связна. Более того, множество неподвижных точек произвольного автоморфизма односвязной связной компактной группы связно. В общем виде мы эти утверждения не доказываем, так как во всех дальнейших примерах связность $\mathfrak{H}$ будет очевидна. Отметим здесь полезное следствие, вытекающее из связности $\mathfrak{H}$: однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ односвязно. Это следует из точной гомотопической последовательности расслоения:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathfrak{G}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) & \longrightarrow & \pi_0\mathfrak{H}. \\ \| & & & & \| \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

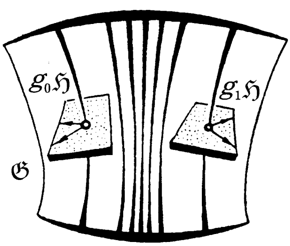

Рис. 122

Если на группе $\mathfrak{G}$ задана биинвариантная метрика, то на любом однородном пространстве вида $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — замкнутая подгруппа в $\mathfrak{G}$, автоматически возникает риманова метрика, инвариантная относительно действия группы $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Для задания этой метрики достаточно определить ее на плоскостях, ортогональных к классам смежности по подгруппе $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$ (рис. 122). Поскольку события происходят в группе $\mathfrak{G}$, то в качестве такой метрики достаточно взять ограничение биинвариантной метрики группы на указанные плоскости. Ясно, что получающаяся на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ метрика инвариантна относительно левого действия группы $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$: плоскость, ортогональная к одному из классов смежности, после левого сдвига перейдет в плоскость также ортогональную к новому классу смежности. Итак, группа $\mathfrak{G}$ действует на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ как подгруппа в группе изометрий введенной нами метрики. В дальнейшем будем всегда считать, что на однородном пространстве $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ введена именно такая метрика, порожденная биинвариантной метрикой группы $\mathfrak{G}$.

Предложение 10.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — связная компактная группа Ли и $\sigma\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ — произвольный инволютивный автоморфизм группы. Тогда однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ с римановой метрикой, порожденной биинвариантной метрикой группы $\mathfrak{G}$, является симметрическим.*

Доказательство.

Так как на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ введена метрика, порожденная биинвариантной метрикой группы, то действие этой группы на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ является изометричным. Нужно построить для каждой точки $v \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ геодезическую симметрию в этой точке, переворачивающую геодезические. Так как $\mathfrak{G}$ действует транзитивно на $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, то достаточно построить такую симметрию только в одной точке $v_0 \in V$. Возьмем, например, в качестве такой точки класс смежности, совпадающий с $\mathfrak{H}$. Тогда инволюция в группе $\mathfrak{G}$, оставляющая на месте $\mathfrak{H}$, очевидно, вводит геодезическую инволюцию и на фактор-пространстве $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Предложение доказано. ■

5. Картановская модель симметрического пространства

Рассмотрим разложение алгебры Ли $G = H + B$. Так как H — подалгебра неподвижных точек автоморфизма $\Theta = (d\sigma)_E$, а плоскость B — инвариантная плоскость, отвечающая собственному числу -1 автоморфизма Θ, то коммутирование элементов из плоскостей H и B происходит так: $[H,H] \subset H$, $[B,H] \subset B$, $[B,B] \subset H$. В частности, тройной коммутатор $[[B,B],B]$ (т. е. совокупность всех элементов вида $[[X,Y],Z]$, где X, Y, $Z \in B$) содержится в B. Оказывается, разложение алгебры Ли порождает некоторое «разложение» соответствующей группы Ли. В группе $\mathfrak{G}$ расположена подгруппа $\mathfrak{H}$ — стационарная подгруппа пространства V. Можно ли вложить в группу $\mathfrak{G}$ и само симметрическое пространство V? Если бы V являлось просто однородным пространством без наличия на нем симметрий, то тогда его вложение в группу было бы в общем случае невозможно (такие примеры легко построить). Однако для симметрического пространства ситуация более благоприятная. Оказывается, в этом случае

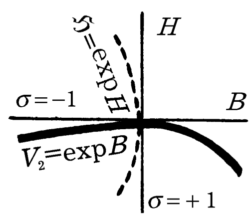

Рис. 123

его можно реализовать в виде некоторой «однородной поверхности» в односвязной группе $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим в группе $\mathfrak{G}$ связную компоненту V_1 подмножества тех элементов g, для которых $\sigma(g) = g^{-1}$. Рассмотрим также в $\mathfrak{G}$ подмножество V_2, заметаемое всеми геодезическими γ группы $\mathfrak{G}$, проходящими через единицу группы и такими, что $\dot\gamma(0) \in B$, $\gamma(0) = E$. Так как группа $\mathfrak{G}$ реализована как подгруппа в группе ортогональных матриц, то V_2 является множеством всех матриц вида $\exp X$, где $X \in B$, т.е. $V_2 = \exp B$. Наконец, рассмотрим в группе $\mathfrak{G}$ подмножество V_3, являющееся образом группы $\mathfrak{G}$ при ее отображении в себя при помощи следующего отображения $p\colon g \to g \cdot \sigma(g^{-1})$ (рис. 123).

Теорема 10.1. *Подмножества V_1, V_2, V_3 в группе $\mathfrak{G}$ совпадают. Это подмножество является гладким подмногообразием в группе $\mathfrak{G}$, диффеоморфным симметрическому пространству $V = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Кроме того, это подмногообразие является вполне геодезическим, т.е. любая геодезическая группы $\mathfrak{G}$, касающаяся подмногообразия V, целиком лежит в этом подмногообразии. Непрерывное отображение p определяет локально тривиальное расслоение (так называемое главное расслоенное пространство) $p\colon \mathfrak{G} \xrightarrow{\mathfrak{H}} V$ со слоем $\mathfrak{H}$.*

Доказательство.

Докажем совпадение V_1 и V_2. Так как автоморфизм σ является геодезической симметрией в точке E, то совпадение V_1 и V_2 следует из тождества $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$. Докажем совпадение V_2 и V_3. Пусть $v \in V_3$, т.е существует g такой, что $v = g\sigma(g^{-1})$. Тогда $\sigma(v) = \sigma(g)g^{-1} = (\sigma(g^{-1}))^{-1}g^{-1} = v^{-1}$, т.е. $v \in V_1 = V_2$. Обратно, пусть $v \in V_2$, т.е $\sigma(v) = v^{-1}$, или (см. выше) $v = \exp X$, где $X \in B$. Рассмотрим в $\mathfrak{G}$ элемент $v_1 = \exp\left(\frac{1}{2}X\right)$; тогда $p(v_1) = v_1^2 = \exp X = v$, т.е. $v \in \operatorname{Im} p$, что и требовалось. Мы воспользовались тем, что v_1 также принадлежит V_2. Докажем, что проекция p определяет главное расслоенное пространство со слоем $\mathfrak{H}$. Рассмотрим в $\mathfrak{G}$ классы смежности $g\mathfrak{H}$ по подгруппе $\mathfrak{H}$. Если элементы g_1 и g_2 принадлежат одному классу смежности, то $p(g_1) = p(g_2)$. Обратно, если $p(g_1) = p(g_2)$, то $g_1\sigma(g_1^{-1}) = g_2\sigma(g_2^{-1})$ или $\sigma(k^{-1}) = k^{-1}$, где $k = g_2^{-1}g_1$, т.е. $k \in \mathfrak{H}$ и $g_1 = g_2h$, так как множество неподвижных точек инволюции связно. Отсюда следует, что подмногообразие V в группе $\mathfrak{G}$ диффеоморфно симметрическому пространству $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Осталось доказать, что это подмногообразие вполне геодезическое, т. е. что любая геодезическая подмногообразия V является в то же время и геодезической во всей группе $\mathfrak{G}$. Рассмотрим тензор кривизны $R_{\mathfrak{G}}$ на группе $\mathfrak{G}$ и тензор кривизны R_V на подмногообразии V. Мы утверждаем, что тензор R_V получается из тензора $R_{\mathfrak{G}}$ ограничением тензора $R_{\mathfrak{G}}$ на подмногообразие $V \subset \mathfrak{G}$. Выше мы в явном виде вычислили тензор $R_{\mathfrak{G}}$. Оказалось, что $R_{\mathfrak{G}}(X,Y)Z = 1/4[[X,Y],Z]$. Пусть X, Y, $Z \in T_*V$, где $V = \exp B$. Тройной коммутатор плоскости B попадает снова в B, следовательно, $R_{\mathfrak{G}}(X,Y)\colon B \to B$, если $X, Y \in B$. Это и означает, что R_V получается из $R_{\mathfrak{G}}$ ограничением на подмногообразие V. Пусть $\gamma \subset V$ — геодезическая в индуцированной римановой метрике. Тогда уравнение, которому удовлетворяет эта геодезическая, имеет вид [2] $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, и произвольное якобиево поле I вдоль γ (на V) удовлетворяет уравнению $(\nabla_{\dot\gamma})^2 I + R(\dot\gamma, I)\dot\gamma = 0$. Следовательно, любая геодезическая вариация на подмногообразии V является таковой и с точки зрения группы $\mathfrak{G}$. Так как $V = \exp B$, то V покрывается пучком однопараметрических подгрупп. Теорема доказана. ■

Построенное вложение $V \to \mathfrak{G}$ называется моделью Картана для симметрического пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Не следует думать, что это вложение является сечением расслоения $p\colon \mathfrak{G} \to V$. Изучим подробнее, как пересекаются классы смежности по подгруппе $\mathfrak{H}$ с подмногообразием $V \subset \mathfrak{G}$.

Предложение 10.3. *Каждый класс смежности $g\mathfrak{H}$ имеет с подмногообразием V непустое пересечение.*

Доказательство.

Допустим противное: пусть существует класс $g_0\mathfrak{H}$ такой, что $(g_0\mathfrak{H})\cap$ $\cap V = \varnothing$. Рассмотрим на V точку $m_0 = p(g_0\mathfrak{H})$, и пусть $m' = \sqrt{m_0}$ есть обозначение такой точки из V, что $(m')^2 = m_0$. Если таких точек несколько, то возьмем любую из них. Если $v \in V$, то $v = g\sigma(g^{-1})$ для некоторого $g \in \mathfrak{G}$, а потому $\sigma(v) = (g\sigma(g^{-1}))^{-1}$, т. е. $\sigma(v) = v^{-1}$, причем выбор элемента g несуществен. Отображение p отображает $\mathfrak{G}$ на V. Можно рассмотреть сквозное отображение $pi\colon V \to V$, $i\colon V \to$ $\to \mathfrak{G}$, $pi(v) = v\sigma(v^{-1})$, т. е. $pi(v) = v^2$ и отображение pi действует на V как «возведение в квадрат». Так как $m_0 = (m')^2$, то $m_0 = pi(m')$. Рассмотрим класс $m'\mathfrak{H}$, тогда $m' \in m'\mathfrak{H} \cap V$ и $m_0 = p(m'\mathfrak{H})$, т. е. полный прообраз точки m_0 при проекции p содержит точки двух классов смежности: $m'\mathfrak{H}$ и $g_0\mathfrak{H}$. Так как p определяет главное расслоенное пространство, то $m'\mathfrak{H} = g_0\mathfrak{H}$, т.е. $g_0\mathfrak{H} \cap V \neq \varnothing$ и содержит по крайней мере точку m'. Полученное противоречие доказывает предложение. ■

Итак, произвольный класс $g\mathfrak{H}$ можно представить в виде $m\mathfrak{H}$, где $m \in V$. Если $g \in \mathfrak{G}$, то через $\sqrt{g}$ обозначим такой элемент g', что $(g')^2 = g$, а через $\{\sqrt{g}\}$ — множество всех таких элементов.

Предложение 10.4. *Пусть $m\mathfrak{H}$ — произвольный класс смежности (где $m \in V$). Тогда выполнено соотношение $m\mathfrak{H} \cap V = \{\sqrt{m^2}\} \cap V$* (рис. 124).

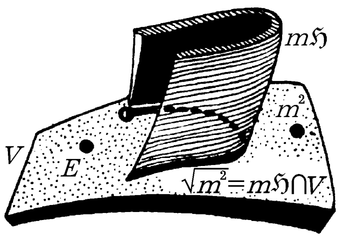

Рис. 124

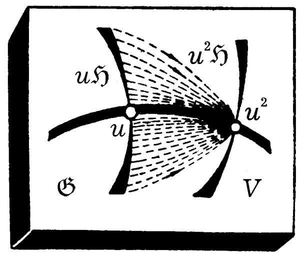

Рис. 125

Доказательство.

Докажем, что $\{\sqrt{m^2}\} \cap V \subset m\mathfrak{H} \cap V$. Пусть $m_1, m_2 \in V$ и $m_1^2 = m_2^2$. Тогда $m_1\sigma(m_1^{-1}) = m\sigma(m^{-1})$, $m^{-1}m_1\sigma(m_1^{-1}m) = E$, т.е. $k\sigma(k^{-1}) = E$, где $k = m^{-1}m_1$. Так как $p(k) = E$, то $k \in \mathfrak{H}$, и $m_1 = mh$, где $h \in \mathfrak{H}$. Покажем, что выполнено обратное включение. Пусть $v \in m\mathfrak{H}$, $v \in V$, тогда $v = mh$, $h \in \mathfrak{H}$ и $v^2 = v\sigma(v^{-1}) = m^2$, т.е. $v \in \{\sqrt{m^2}\}$, что и требовалось доказать. ■

«Нулевой класс смежности» — подгруппа $\mathfrak{H}$ — пересекается с подмногообразием V по множеству таких v, что $v^2 = E$.

Действие группы $\mathfrak{G}$ на многообразии V можно описать так: $g(a) = ga\sigma(g^{-1})$, где $g \in \mathfrak{G}$, $a \in V$. Если, в частности, $g \in V$, то $g(a) = gag$; если $g \in \mathfrak{H}$, то $g(a) = gag^{-1}$, т.е. $\mathfrak{H}$ действует на V вращениями, а V действует на самом себе сдвигами. Действие проекции $p\colon \mathfrak{G} \to V$ схематически показано на рис. 125.

6. Геометрия картановских моделей

Рассмотрим простейший пример реализации симметрического пространства в виде подмногообразия в группе $\mathfrak{G}$.

Пусть $\mathfrak{G} = SU_2 = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{smallmatrix}\right)$, где $x,\, y \in \mathbb{C}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$. В качестве инволюции σ рассмотрим гомоморфизм $\sigma(g) = \overline{g}$ (комплексное сопряжение в группе матриц). Тогда $\mathfrak{H} = SO_2 = \{g \in SU_2 | g = \overline{g}\}$; подгруппа вещественных унитарных матриц совпадает с группой SO_2. Рассмотрим разложение $G = H + B$. Тогда

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix},\ B = i\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix};\ a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Симметрическое пространство $V = SU_2/SO_2$ гомеоморфно сфере. Предъявим картановскую модель сферы S^2 в группе SU_2. Положим $i\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right) = Q$, $a^2 + b^2 = 1$, тогда

$$\exp(tQ) = E\Big(1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots\Big) + Q\Big(t - \frac{t^3}{3!} + \ldots\Big) = E\cos t + Q\sin t.$$

Так как матрица Q пробегает окружность, то матрицы $\exp(tQ)$ заполняют двумерную сферу $S^2 \subset S^3$, причем сфера S^2 вложена как экватор в сферу S^3 (рис. 126). Нулевой класс смежности $\mathfrak{H}$ пересекает сферу S^2 в двух точках: E и $-E$.

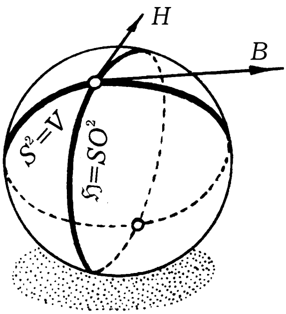

Рис. 126

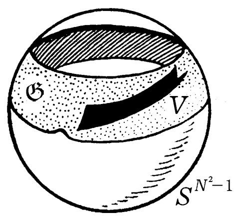

Рис. 127

Как было доказано ранее, группы Ли являются симметрическими пространствами. Пусть V — группа Ли, положим $\mathfrak{G} = V \times V$ и рассмотрим инволюцию $\sigma\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ такую, что $\sigma(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. Множество неподвижных точек автоморфизма σ — это подгруппа $\mathfrak{H} = (v, v)$, т. е. диагональ в прямом произведении $V \times V$. Пусть G и K — алгебры Ли групп $\mathfrak{G}$ и V соответственно, тогда $G = K \oplus K$. С другой стороны, G

распадается в прямую сумму двух инвариантных подпространств автоморфизма Θ, где $\Theta(X,Y)=(Y,X)$, $(X,Y)\in K\oplus K$, $G=B+H$, $\Theta H = H$. Ясно, что $H=(X,X), B=(X,-X)$. Так как $\sigma(v,v^{-1}) = (v,v^{-1})^{-1}$, то пространство V вложено в группу $\mathfrak{G}$ как вполне геодезическое подмногообразие, составленное из точек вида (v,v^{-1}). Отображение $p\colon \mathfrak{G}\to V$ имеет вид $p(g)=(v_1v_2^{-1},v_2v_1^{-1})\in iV$, где $g=(v_1,v_2)$; отсюда $pi(g)=g^2$ и отображение p является диффеоморфизмом между V и $(V\times V)/\mathfrak{H}$.

Рассмотрим вопрос о римановых метриках на симметрических пространствах $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, инвариантных относительно действия на них группы $\mathfrak{G}$.

Предложение 10.5. *Рассмотрим картановскую модель $V\subset\mathfrak{G}$ симметрического пространства $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, и пусть $\langle\,,\rangle$ — биинвариантная метрика на $\mathfrak{G}$. Рассмотрим на V риманову метрику $\langle\,,\rangle_V$, индуцированную вложением $i\colon V\to\mathfrak{G}$. Тогда эта метрика является инвариантной относительно действия группы $\mathfrak{G}$ на V.*

Доказательство.

Напомним, что мы реализовали группу $\mathfrak{G}$ как гладкое подмногообразие в сфере S^{N^2-1} в пространстве $\mathbb{R}^{N^2}$ всех матриц размера $N\times N$, тогда если $X,Y\in G$, то $\langle X,Y\rangle = \operatorname{Sp} XY^T$, где $X,Y\in\mathbb{R}^{N^2}$. Вполне геодезическое подмногообразие $V\subset\mathfrak{G}$ расположено, следовательно, в евклидовом пространстве, и метрика $\langle\,,\rangle_V$ индуцирована на V именно этим вложением. Если $g\in\mathfrak{G}$, $v\in V$, то $g(v)=gv\sigma(g^{-1})$. Пусть $X,Y\in B$, тогда при действии $\mathfrak{G}$ плоскость B отображается на плоскость $T_{g(E)}V$, где $g(E)=g\sigma(g^{-1})$. Отображение $g_*\colon B\to T_{g(E)}V$ имеет вид $X\to gX\sigma(g^{-1})$. Осталось проверить выполнение равенства

$$\langle g_*X,g_*Y\rangle_V|_{g(E)} = \langle X,Y\rangle_V|_E,$$

т. е.

$$\operatorname{Sp} gX\sigma(g^{-1})(gY\sigma(g^{-1}))^T = \operatorname{Sp} XY^T.$$

Выше было доказано, что каждый класс смежности $g_0\mathfrak{H}$ по подгруппе $\mathfrak{H}$ имеет непустое пересечение с подмногообразием V, следовательно, любой элемент $g\in\mathfrak{G}$ представляется в виде произведения (это представление неоднозначно) $g=v'h$, где $v'\in V$, $h\in\mathfrak{H}$. Подставляя это разложение в последнюю формулу, получаем

$$\operatorname{Sp} v'hXh^{-1}v'v'^T h^{-1^T}Y^Th^Tv'^T = \operatorname{Sp} XY^T,$$

так как матрицы v', h ортогональны ($\mathfrak{G} \subset SO_N$). Предложение доказано. ■

Это предложение полезно при многих конкретных вычислениях на симметрических пространствах. В самом деле, мы в явном виде описали инвариантную риманову метрику на симметрическом пространстве при его реализации в евклидовом пространстве, причем эта метрика оказывается индуцированной объемлющей евклидовой метрикой (рис. 127). Итак, если нам нужно решать какую-либо задачу, связанную с инвариантной метрикой на симметрическом пространстве, то полезно реализовать его в виде картановской модели в группе, вложенной в стандартную сферу. Ниже мы перечислим основные конкретные матричные реализации симметрических пространств.

7. Некоторые важные примеры симметрических пространств

1. Пространство SU_n/SO_n. Группой изометрий $\mathfrak{G}$ пространства V является группа SU_n. Инволютивный автоморфизм Θ в алгебре Ли $G = su_n$ имеет вид $\Theta(X) = \overline{X}$, где черта означает комплексное сопряжение матриц, автоморфизм $\Theta\colon G \to G$ продолжается до инволютивного автоморфизма $\sigma\colon SU_n \to SU_n$, $\sigma(g) = \overline{g}$. Рассмотрим в алгебре G плоскость B, на которой Θ равен $-E$; эта плоскость состоит из всех симметрических чисто мнимых матриц порядка n со следом 0. Плоскость H, на которой Θ равен $+E$, состоит из вещественных кососимметрических матриц (алгебра Ли группы SO_n). Плоскость B является касательным пространством к картановской модели $V = \{g\sigma(g^{-1})\} = \{gg^T\}$, и так как $v^T = v$, $v \in V$, то модель симметрического пространства состоит из всех унитарных симметрических матриц и только из них.

2. Пространство SU_{2m}/Sp_m. Группой изометрий пространства V является группа SU_{2m}. Инволютивный автоморфизм Θ в алгебре su_{2m} имеет вид $\Theta(X) = J\overline{X}J^{-1}$, где $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right)$; черта означает комплексное сопряжение. Автоморфизм Θ продолжается до инволюции $\sigma\colon SU_{2m} \to SU_{2m}$, $\sigma(g) = J\overline{g}J^{-1}$. Множество неподвижных точек автоморфизма σ совпадает с подгруппой Sp_m, $gJ = J\overline{g}$. В самом деле, унитарные операторы g, удовлетворяющие этому дополнительному соотношению, сохраняют кососимметрическую форму в $\mathbb{C}^{2m}$ вида $\sum\limits_{k=1}^{m} z_k \wedge z_{m+k}$, эта форма и задается кососимметрической матрицей J. Вполне геодезическое подмногообразие V (модель симмет-

рического пространства) образовано всеми элементами вида $g\sigma(g^{-1})$, т. е. gJg^TJ^{-1}, где g пробегает всю группу SU_{2m}. Для более удобного описания подмногообразия V рассмотрим его изометричный сдвиг на элемент $J \in SU_{2m}$. Получим модель $V' = V \cdot J = \{gJg^T\}$. Если $v' = gJg^T$, то $v'^T = -v'$, и ясно, что модель V' (изометричная V) содержится в множестве всех кососимметрических унитарных матриц в группе SU_{2m}. Касательное пространство B имеет вид $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \overline{Z_2} & -\overline{Z_1} \end{pmatrix}$, где $Z_1 \in su_m$, $Z_2 \in so(m, \mathbb{C})$.

3. Пространство SO_{2n}/U_n. Группой изометрий пространства является группа SO_{2n}. Инволютивный автоморфизм Θ в алгебре Ли so_{2n} имеет вид $\Theta(X) = JXJ^{-1}$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Автоморфизм Θ продолжается до инволюции $\sigma(g) = JgJ^{-1}$. Множество неподвижных точек автоморфизма σ — это подгруппа $\mathfrak{H} = \{g \in SO_{2n}, Jg = gJ\}$. Так как оператор J задает комплексную структуру в $\mathbb{R}^{2n}$, отождествляя его с $\mathbb{C}^n$, то $\mathfrak{H}$ изоморфна группе U_n. Вложение $U_n \to SO_{2n}$ задается стандартной формулой $C + iD \to \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix}$. Вполне геодезическое подмногообразие V (картановская модель) образовано в SO_{2n} всеми элементами вида $g\sigma(g^{-1})$, т. е. $gJg^{-1}J^{-1}$, где g пробегает группу SO_{2n}. Для более удобного описания подмногообразия V рассмотрим его изометричный сдвиг на элемент J. Получим модель $V' = V \cdot J = \{gJg^T\}$. Если $v' = gJg^T$, то $(v')^T = -v'$, т. е. модель V' содержится в множестве кососимметрических ортогональных матриц в группе SO_{2n} (но не совпадает с ним). Касательное пространство B имеет вид $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix}$, где $Z_1, Z_2 \in so_n$.

4. Пространство Sp_n/U_n. Группой изометрий пространства V является группа Sp_n. Мы считаем, что Sp_n реализована стандартным образом в виде подгруппы в SU_{2n}. Инволюция Θ в алгебре Ли sp_n имеет вид $\Theta(X) = \overline{X}$ (комплексное сопряжение на su_{2n}), т. е. совпадает с автоморфизмом $\Theta(X) = JXJ^{-1}$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Напомним, что элемент g из SU_{2n} принадлежит Sp_n тогда и только тогда, когда $\overline{g} = JgJ^{-1}$, т. е. $\overline{g}J = Jg$. Автоморфизм Θ продолжается до инволюции $\sigma(g) = \overline{g}$. Множество неподвижных точек автоморфизма σ — это подгруппа $\{g \in Sp_n, g = \overline{g}\}$, т. е. $Sp_n \cap SO_{2n}$, т. е. совпадает с подгруппой $U_n \subset SO_{2n}$ при ее стандартном вложении: $C + iD \to \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix}$. Вполне геодезическое подмногообразие V (картановская модель) образовано в Sp_n матрицами вида $g\sigma(g^{-1}) = gg^T$. Касательное пространство B имеет вид $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix}$, где $Z_1 \in u_n$ — чисто мнимая матрица, а Z_2 — чисто мнимая симметрическая матрица.

5. Пространство $SU_{p+q}/S(U_p \times U_q)$ — комплексное грассманово многообразие. Группой изометрий пространства является группа SU_{p+q}. Инволюция Θ в алгебре Ли su_{p+q} имеет вид $\Theta(X) = J_{p,q}XJ_{p,q}$, где $J_{p,q} = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix}$, E_α — единичная матрица размерности α. Автоморфизм Θ продолжается до инволюции $\sigma(g) = J_{p,q} \cdot g \cdot J_{p,q}$. Множество неподвижных точек для σ — это подгруппа $\{g \in SU_{p+q},\ J_{p,q} \cdot g = g \cdot J_{p,q}\}$, т. е. $S(U_p \times U_q)$. Алгебра H имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$, где $C \in u_p$, $D \in u_q$, $\mathrm{Sp}(C + D) = 0$. Вполне геодезическое подмногообразие V (картановская модель) образовано в SU_{p+q} матрицами $gJ_{p,q}g^{-1}J_{p,q}$. Касательное пространство B имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & Z \\ -\bar{Z}^T & 0 \end{pmatrix}$, где Z — комплексная матрица с p строками и q столбцами. При $p = 1$ пространство V является комплексным проективным пространством.

6. Пространство $SO_{p+q}/SO_p \times SO_q$ — вещественное грассманово многообразие. Группой изометрий является группа SO_{p+q}. Инволюция Θ имеет вид $\Theta(X) = J_{p,q}XJ_{p,q}$. Она продолжается до инволюции $\sigma(g) = J_{p,q} \cdot g \cdot J_{p,q}$. Множество неподвижных точек — это подгруппа $\{g \in SO_{p+q},\ J_{p,q} \cdot g = g \cdot J_{p,q}\}$, т. е. $SO_p \times SO_q$. Подалгебра H имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$, где $C \in so_p$, $D \in so_q$. Картановская модель образована в SO_{p+q} матрицами $gJ_{p,q}g^{-1}J_{p,q}$. Рассмотрим сдвиг $V' = V \cdot J_{p,q}$, тогда $v = gJ_{p,q}g^{-1}$, $v^T = v$, т. е. V' содержится в множестве симметрических ортогональных матриц. Условие $q^T = q$ эквивалентно равенству $q^2 = E$. Подмножество $\{q^2 = E\}$ в SO_{p+q} отождествляется с объединением грассмановых многообразий: $P = \bigcup\limits_\alpha SO_{p+q}/S(O_\alpha \times O_{p+q-\alpha})$, и модель V является одной из компонент связности этого множества P. Каждый элемент $gJ_{p,q}g^{-1} \in V$ можно интерпретировать как p-мерную плоскость в $\mathbb{R}^{p+q}$, сопоставив оператору $gJ_{p,q}g^{-1}$ его инвариантную плоскость, отвечающую собственному числу -1. Итак, инвариантная метрика на грассмановом многообразии V индуцируется евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{N^2}$ (где $N = p + q$) при вложении V как одной из компонент связности множества $\{q^2 = E\} \cap SO_{p+q}$. Аналогичная картина имеет место и для комплексного грассманова многообразия.

Касательное пространство B имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z^T & 0 \end{pmatrix}$, где Z — вещественная матрица с p строками и q столбцами. При $p = 1$ пространство V совпадает со сферой S^q.

7. Пространство $Sp_{p+q}/Sp_p \times Sp_q$ — кватернионное грассманово

многообразие. Здесь $\mathfrak{G} = Sp_{p+q}$, $\Theta(X) = K_{p,q} X K_{p,q}$, где

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} -E_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_q \end{pmatrix}.$$

Подпространство B имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & C & 0 & D \\ -\overline{C}^T & 0 & D^T & 0 \\ 0 & -\overline{D} & 0 & \overline{C} \\ -\overline{D}^T & 0 & -C^T & 0 \end{pmatrix},$$

где C, D — произвольные комплексные матрицы с p строками и q столбцами.

Мы перечислили все компактные симметрические пространства, не распадающиеся в прямые произведения других симметрических пространств и такие, что группа $\mathfrak{G}$ не является «особой» группой Ли (об «особых» группах Ли см. ниже).

Связная конечномерная компактная некоммутативная группа Ли называется простой, если она не содержит нетривиальных связных подгрупп, являющихся нормальными делителями (имеющими положительную размерность) и отличных от $\mathfrak{G}$. В терминах алгебры Ли G группы $\mathfrak{G}$ это означает, что в G нет ненулевых идеалов, отличных от G. Оказывается, простые группы Ли являются теми «элементарными кирпичами», из которых конструируется любая компактная группа Ли. Имеет место нетривиальная теорема (доказательство которой мы опускаем): *любая связная компактная односвязная группа Ли распадается в прямое произведение* (*как многообразие и как группа*) *простых групп Ли.* Полный список простых групп можно полностью описать. В первую очередь это так называемые классические серии: 1) ортогональные группы SO_n, 2) специальные унитарные группы SU_n, 3) симплектические группы Sp_n. Кроме того, имеется еще пять особых групп, обозначаемых обычно G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Эти группы не включаются в бесконечные серии, в отличие от классических, и «стоят особняком». Само существование этих особых групп основано на весьма специфических алгебраических закономерностях.

Дадим здесь описание трех из пяти особых групп, а именно G_2, F_4, E_6 (описания E_7 и E_8 достаточно сложны и поэтому опущены).

а) Описание группы G_2. Пусть K — алгебра октав (чисел Кэли), т. е. K — восьмимерная вещественная алгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$, умножение в которой можно задать, например, так. Фиксируем в $\mathbb{R}^8$ ортобазис, векторы которого обозначим $1, e_2, e_3, \ldots, e_8$, 1 — единица: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $x \in K$, а умножение на остальных образующих антикоммутативно: $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$. Таблица умножения задается схемой рис. 128. Например, $e_2 e_3 = e_5$, $e_4 e_2 = -e_6$ и т. д., направление стрелок на рис. 128 указывает знак произведения. При этом каждый отрезок треугольника рассматривается как замкнутая окружность, ориентированная в направлении стрелки. Рассмотрим группу линейных преобразований $\mathbb{R}^8$, являющихся автоморфизмами алгебры октав K. По определению эта группа и называется группой G_2. Поскольку автоморфизмы сохраняют единицу, то группа G_2 является подгруппой в группе SO_7. В самом деле, в алгебре K можно задать скалярное произведение $\langle a, b\rangle = a \cdot \overline{b}$, где $\overline{b} = b_1 \cdot 1 - b_2 e_2 - \ldots - b_8 e_8$ (сопряжение). Ясно, что это скалярное произведение совпадает с евклидовым: $\langle a, b\rangle = \sum\limits_{i=1}^{8} a_i b_i$. Группа G_2 является 14-мерным гладким многообразием.

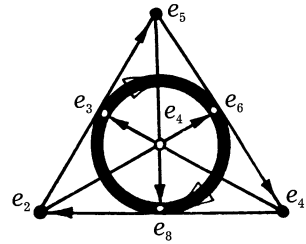

Рис. 128

б) Описание группы F_4. Рассмотрим линейное пространство L, образованное всеми (3×3) матрицами вида $\begin{pmatrix} a_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & a_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & a_3 \end{pmatrix}$, где $x_i \in K$ (алгебре октав), a_i — комплексные (вещественные) числа, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\overline{x_i}$ — операция сопряжения в K. Сложение матриц и умножение их на элементы поля $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$) определены обычным образом, что превращает L в 27-мерное линейное пространство. Структура алгебры в L вводится следующей операцией: $X \circ Y = 1/2(XY + YX)$, где XY и YX суть обычные произведения матриц. Операция $X \circ Y$ превращает L в неассоциативную алгебру, причем 1) $X \circ Y = Y \circ X$, 2) $(X^2 \circ Y) \circ X = X^2 \circ (Y \circ X)$. Группа Ли F_4 может быть описана как группа автоморфизмов этой алгебры L.

в) Описание группы E_6. Пусть $A \in L$ — произвольный элемент. Через $R_A\colon L \to L$ обозначим правый сдвиг $R_A(X) = X \circ A$. Рассмотрим теперь алгебру Ли f_4 группы F_4. Эта алгебра Ли является алгеброй дифференцирований алгебры L (см. выше). Расширим алгебру f_4, вложив ее в некоторую большую алгебру Ли, которая и будет изоморфна алгебре Ли e_6 группы E_6. Обозначим через e_6 линейное пространство всех линейных преобразований алгебры L, имеющих вид $H = R_A + D$, где $A \in L$, $\operatorname{Sp} A = 0$, $D \in f_4$. Операцию коммутирования в пространстве e_6 введем так: $[H_1, H_2] = H_1H_2 - H_2H_1$, где через H_iH_j обозначена композиция преобразований H_i и H_j. Легко убедиться в том, что эта операция превращает пространство e_6 в алгебру Ли. По определению группа Ли, алгебра Ли которой совпадает с e_6, и называется группой E_6. Из определения следует, что $E_6 \subset SU_{27}$.

§ 11. Геометрия групп Ли

1. Полупростые группы и алгебры Ли

В настоящем параграфе мы дадим краткое описание алгебраической структуры полупростых алгебр Ли. Для этого нам потребуется ввести так называемые корни алгебр Ли. Теория корней, несмотря на свою геометрическую прозрачность, с технической точки зрения достаточно нетривиальна, что не позволяет нам излагать ее здесь в полном объеме и в максимальной общности. С другой стороны, знакомство с корнями совершенно необходимо для того, чтобы эффективно использовать аппарат групп и алгебр Ли во многих задачах прикладного характера (примеры таких приложений будут даны ниже). Поэтому мы решили построить свое изложение следующим образом. Мы сформулируем в полном виде все основные необходимые для нас результаты и определения, связанные с теорией корней, однако доказательства будем проводить в основном для одной простой алгебры, а именно для $sl(n, \mathbb{C})$. Эта алгебра выбрана нами в качестве модельного примера по следующим соображениям. Во-первых, все основные эффекты, связанные со структурой корней полупростых алгебр Ли, могут быть в полном объеме проиллюстрированы на примере алгебры $sl(n, \mathbb{C})$. Во-вторых, изучив структуру этой алгебры, заинтересованный читатель сможет уже без особого труда овладеть более тонкими деталями теории, руководствуясь, например, [7].

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Ли и G — ее алгебра Ли, т. е. касательное пространство в единице группы. Поскольку мы рассматриваем только матричные группы, т. е. реализованные в виде подгрупп в группе GL_N, то операция коммутирования в алгебре Ли G может быть задана так: $[X,Y] = XY - YX$, где XY и YX — произведения матриц $X, Y \in G$. Группа $\mathfrak{G}$ естественным образом действует на своей алгебре Ли G как группа линейных преобразований, обозначаемых через $\mathrm{Ad}_g\colon G \to G$ и определяемых так: $\mathrm{Ad}_g X = gXg^{-1}$, где $X \in G$, $g \in \mathfrak{G}$, gXg^{-1} — произведение матриц. Дифференциал преобразования Ad_g в точке $E \in \mathfrak{G}$ имеет вид $\mathrm{ad}_X\colon G \to G$, где $\mathrm{ad}_X Y = [X,Y] = XY - YX$ (проверьте!). Соответствие $g \to \mathrm{Ad}_g$ называется присоединенным представлением группы $\mathfrak{G}$, а соответствие $X \to \mathrm{ad}_g$ — присоединенным представлением алгебры Ли G. В качестве поля коэффициентов рассмотрим $\mathbb{C}$ (и $\mathbb{R}$). На протяжении настоящего параграфа особое внимание будет уделено алгебре $sl(n, \mathbb{C})$ (и $sl(n, \mathbb{R})$).

Определение 11.1. Билинейная комплекснозначная форма $(X, Y) = \mathrm{Sp}\,\mathrm{ad}_X \cdot \mathrm{ad}_Y$ называется ***формой Киллинга.*** Здесь ad_X и ad_Y являются линейными преобразованиями алгебры Ли G. Эта форма определяет вещественнозначное скалярное произведение $\mathrm{Re}(X, Y) = \langle X,Y\rangle$. Иногда будем называть его произведением Киллинга. В нашем модельном примере $G = sl(n, \mathbb{C})$ эта форма может быть записана так (с точностью до постоянного множителя): $(X, Y) = \mathrm{Sp}\, XY$.

Лемма 11.1. *Комплекснозначная форма* $(\,,\,)$ *на алгебре Ли* $sl(n, \mathbb{C})$ *невырождена и удовлетворяет следующим свойствам:* 1) $(X, Y) = (Y, X)$, 2) $([X,Y],Z) = (X,[Y,Z])$.

Доказательство сразу вытекает из формулы $\mathrm{Sp}[X, Y] = 0$ и явной формулы для $(\,,\,)$. Свойство 2) означает, что имеет место равенство $\langle \mathrm{ad}_X Y, Z\rangle = -\langle Y, \mathrm{ad}_X Z\rangle$, т. е. линейные операторы ad_X задаются кососимметрическими матрицами (т. е. ad_X кососимметричны относительно скалярного произведения $\langle \,,\, \rangle$).

Определение 11.2. Алгебра Ли G (и соответствующая ей группа Ли $\mathfrak{G}$) называется полупростой, если форма Киллинга невырождена на G.

Имеет место важный алгебраический факт: любая полупростая алгебра Ли распадается в прямую сумму (как алгебра Ли) своих подалгебр, каждая из которых является простой алгеброй Ли (в смысле п. 7 § 10). В частности, как следует из леммы 11.1, алгебра Ли $sl(n, \mathbb{C})$ является простой.

Лемма 11.2. *Форма Киллинга инвариантна относительно преобразований* Ad_g, *т. е.* $(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) = (X, Y)$, $g \in \mathfrak{G}$, $X, Y \in G$.

Для $sl(n, \mathbb{C})$ доказательство вытекает из явной формулы для $(\,,)$.

Мы уже видели, что форма $\mathrm{Sp}\,\mathrm{ad}_X \cdot \mathrm{ad}_Y$, определенная первоначально в инвариантных терминах, а именно в терминах операторов ad_X, ad_Y (не предполагающих для своего определения конкретного матричного представления алгебры Ли), может быть тем не менее записана более простым образом, если использовать конкретное матричное представление алгебры $sl(n, \mathbb{C})$, а именно $(X, Y) = \mathrm{Sp}\,XY$. Это обстоятельство является отражением более общего факта: для простых алгебр Ли G (над $\mathbb{C}$) форма $(\,,\,)$ определена однозначно с точностью до скалярного множителя в том смысле, что если G — простая алгебра, то для каждого ее линейного представления ρ выполнено тождество $(X, Y) = a_\rho \cdot \mathrm{Sp}\,\rho X \cdot \rho Y$, где числовой коэффициент a_ρ не зависит от элементов X, Y, а определяется только представлением ρ. Здесь через $\rho X \cdot \rho Y$ обозначено обычное матричное произведение матриц ρX и ρY.

2. Картановские подалгебры

Пусть G — полупростая конечномерная алгебра Ли над полем комплексных чисел (например, $sl(n, \mathbb{C})$) и X — произвольный ее элемент. Через $\mathrm{Ann}\,X$ обозначим линейное подпространство в G, состоящее из всех тех элементов Y, для которых $\mathrm{ad}_Y X = 0$, т. е. $[Y, X] = 0$. Таким образом, $\mathrm{Ann}\,X$ состоит из всех элементов алгебры, коммутирующих с элементом X.

Лемма 11.3. *Подпространство* $\mathrm{Ann}\,X$ *является подалгеброй в* G.

Доказательство.

Пусть $Z, Y \in \mathrm{Ann}\,X$, тогда $[Z, X] = [Y, X] = 0$. Отсюда $[[Z, Y], X] = -[[X, Z], Y] - [[Y, X], Z] = 0$, т. е. $[Z, Y] \in \mathrm{Ann}\,X$. Здесь мы воспользовались тем, что в алгебре Ли выполняется тождество Якоби $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$. ■

Подалгебра $\mathrm{Ann}\,X$ иногда называется аннулятором элемента X.

Определение 11.3. Полупростой элемент $X \in G$ называется *регулярным*, если размерность его аннулятора наименьшая из возможных.

Остальные элементы алгебры называются *сингулярными*. Аннулятор регулярного элемента X называется *картановской подалгеброй* в G. Для нас будет особенно интересен случай, когда алгебра Ли компактна.

Ясно, что $X \in \operatorname{Ann} X$. Регулярные элементы образуют в алгебре открытое всюду плотное множество $\operatorname{Reg} G$, сингулярные элементы заполняют в алгебре замкнутое множество меры нуль. Это следует из того, что условие сингулярности элемента записывается в виде системы алгебраических уравнений на элементы матрицы X, следовательно, при малом возмущении общего типа сингулярность может быть разрушена. В этом смысле регулярные элементы являются элементами «общего положения».

Предложение 11.1. *Если G — комплексная полупростая алгебра Ли, то любая ее картановская подалгебра коммутативна. Любые две картановские подалгебры T_1 и T_2 сопряжены в G, т. е. существует такой элемент $g \in \mathfrak{G}$, что $gT_2g^{-1} = T_1$. Кроме того, картановская подалгебра является максимальной коммутативной подалгеброй в алгебре G.*

Доказательство см., например, в [7]. Рассмотрим пример $sl(n, \mathbb{C})$. Эта алгебра Ли состоит из всех матриц X размера $(n \times n)$ с комплексными коэффициентами, причем $\operatorname{Sp} X = 0$. В качестве картановской подалгебры можно взять, например, семейство диагональных матриц вида $h = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, $\{a_i\}$ — собственные числа оператора (матрицы) h, $\operatorname{Sp} h = \sum\limits_i a_i = 0$. Отсюда, очевидно, следует, что элемент $h \in T$ регулярен тогда и только тогда, когда все собственные числа оператора h различны, т. е. $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$. Таким образом, регулярные элементы в T – это действительно элементы «общего положения», т. е. «типичные элементы» алгебры $sl(n, \mathbb{C})$.

Найдем аннулятор регулярного элемента $h \in T$. По определению это — совокупность матриц, коммутирующих с h. Но так как все собственные числа λ_i различны, то любая такая матрица, коммутирующая с h, сама обязана быть диагональной (проверьте!). Таким образом, мы доказали, что аннулятором регулярного элемента является подалгебра диагональных матриц. Очевидно, что эта подалгебра коммутативна. Кроме того, она является максимальной коммутативной подалгеброй.

В силу предложения 11.1 можно теперь говорить о какой-то одной фиксированной картановской подалгебре, поскольку все другие получаются из нее автоморфизмами алгебры. Например, для алгебры $sl(n, \mathbb{C})$ мы фиксируем картановскую подалгебру T, составленную из диагональных матриц. В этом примере сингулярные элементы характеризуются тем, что среди собственных чисел представляющих их матриц есть совпадающие. Ясно, что это означает увеличение размерности аннулятора такого элемента — появляются новые матрицы, коммутирующие с данной. Отметим, что алгебра Ли $gl(n, \mathbb{C})$, содержащая $sl(n, \mathbb{C})$ в качестве подалгебры, полупростой не является. В самом деле, алгебра $gl(n, \mathbb{C})$ содержит ненулевой идеал λE, где $\lambda \neq 0$, E — единичная матрица. Этот идеал является центром, и, следовательно, форма Киллинга не является невырожденной на $gl(n, \mathbb{C})$.

3. Корни полупростой алгебры Ли и ее корневое разложение

Пусть G — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и T — некоторая фиксированная подалгебра Картана. Оказывается, эта подалгебра определяет некоторый набор линейных функций, которые могут быть изображены затем векторами в алгебре и называются корнями алгебры. Геометрический смысл корней очень прост. Дадим сначала неформальное объяснение. Пусть задано некоторое точное линейное конечномерное представление алгебры G, т. е. задан мономорфизм алгебры G в алгебру линейных преобразований некоторого линейного пространства V, $\dim V = N < \infty$. Следовательно, все элементы алгебры G изображаются линейными операторами, действующими в V. В частности, это относится и к элементам картановской подалгебры T. Совокупность матриц размера $N \times N$, изображающих элементы T, обладает важным свойством: это коммутативное семейство матриц. Предположим, что в пространстве V можно выбрать такой базис, в котором все матрицы семейства T изобразятся (одновременно) диагональными операторами, т. е. базис составлен из векторов, являющихся собственными сразу для всех операторов из семейства T. Из факта одновременной диагонализуемости всех элементов из T в этом базисе следует, что собственные числа $\lambda_i(h)$ преобразования $h \in T$, стоящие на диагонали матрицы, оказываются линейными функциями на подалгебре T, так как сложение двух диагональных матриц означает суммирование собственных чисел, стоящих на одинаковых местах. Таким образом, каждое собственное число из набора $\lambda_1(h), \ldots, \lambda_N(h)$ можно рассматривать как линейную функцию на подалгебре T в G. Эти линейные функции называются весами данного представления. Оказывается, свойства представления в значительной степени определяются свойствами этого набора линейных функционалов на T. Ясно также, что для другого представления алгебры G этот набор линейных функций (собственных чисел) будет, вообще говоря, другим. Среди множества всех линейных представлений алгебры G выделено одно замечательное представление, с которым мы уже знакомы, — это присоединенное представление. Оно задается отображением $X \to \mathrm{ad}_X$, где $ad_X Y = [X, Y]$, $ad_X : G \to G$. Здесь линейное пространство V совпадает с пространством самой алгебры G, в частности $\dim V = N = \dim G$. Каждый элемент $X \in G$ изображается матрицей размера $N \times N$. Веса этого представления и называются корнями алгебры G. Оказывается, эти корни полностью определяют структуру полупростых алгебр Ли, в частности классификация всех таких алгебр Ли может быть дана в терминах корней. Эти корни являются линейными функциями, определенными на картановской подалгебре T. Дадим теперь формальное определение.

Определение 11.4. Линейная функция $\alpha(h)$ на картановской подалгебре T в полупростой алгебре Ли G называется корнем, если существует такой элемент $E_\alpha \in G$, $E_\alpha \neq 0$, что $[h, E_\alpha] = \alpha(h) \cdot E_\alpha$ для любого $h \in T$. Другими словами, должен существовать вектор $E_\alpha \in G$, являющийся собственным для всех операторов вида $\mathrm{ad}_h : G \to G$, $\mathrm{ad}_h E_\alpha = [h, E_\alpha]$. При этом корень α является собственным числом $\alpha(h)$, определенным на множестве векторов $h \in T$.

Теорема 11.1 (Теорема о корневом разложении полупростой алгебры). *Пусть G — полупростая алгебра Ли, $T \subset G$ — картановская подалгебра и $\Delta = \{\alpha\}$ — набор корней алгебры G; пусть G_α — собственное подпространство, отвечающее корню (собственному числу) α. Тогда алгебра G распадается в прямую сумму линейных подпространств T и $\{G_\alpha\}$, т. е. $G = T \oplus \sum\limits_{\alpha \neq 0} G_\alpha$. Все подпространства G_α, отвечающие $\alpha \in \Delta$, являются одномерными над полем $\mathbb{C}$. Подпространства G_α называются корневыми.*

Доказательство.

Как и раньше, мы дадим доказательство только для случая $sl(n, \mathbb{C})$ (модельный пример). Алгебра $sl(n, \mathbb{C})$ представлена в виде алгебры комплекснозначных матриц $(n \times n)$. Через T_{ij} обозначим элементарную матрицу $n \times n$, в которой отличен от нуля только один эле-

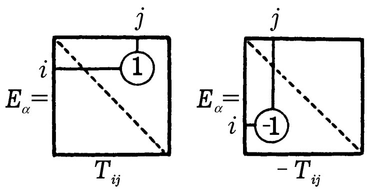

Рис. 129

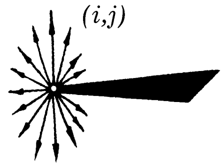

Рис. 130

мент на месте (i,j), равный единице; i — номер строки, j — номер столбца. Картановская подалгебра T состоит из диагональных матриц $h = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, где $a_i \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0$. Векторы E_α, являющиеся собственными для всех преобразований $\mathrm{ad}_h \colon G \to G$, имеют вид T_{ij}, если $i < j$, и $-T_{ij}$, если $i > j$ (рис. 129). В самом деле, вычисляя $\mathrm{ad}_h T_{ij}$, получаем $[h, T_{ij}] = a_i - a_j$, т. е. $\alpha(h) = a_i - a_j$. Таким образом, корни α алгебры $sl(n, \mathbb{C})$ нумеруются парой индексов i, j; мы будем писать теперь $\alpha = \alpha_{ij}; \alpha_{ij}(h) = a_i - a_j$ (рис. 130). Так как $(-\alpha_{ij})(h) = a_j - a_i = \alpha_{ji}(h)$, то $-\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (рис. 131). Итак, алгебра $sl(n, \mathbb{C})$ представляется в виде $T \oplus \sum\limits_{i,j} \mathbb{C}T_{ij}$. Таким образом, в качестве корневого разложения алгебры можно взять ее стандартное разложение в прямую сумму одномерных подпространств $\mathbb{C}T_{ij}$ и плоскости T. Теорема доказана. ■

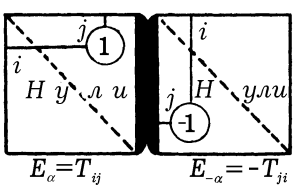

Рис. 131

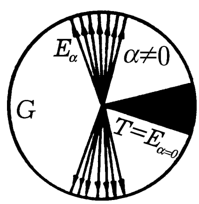

Рис. 132

Отметим, что картановскую подалгебру T можно при желании рассматривать как собственное подпространство преобразований ad_T, отвечающее собственному значению нуль. Кратность нулевого собственного значения равна r т. е. рангу алгебры G, размерности картановской подалгебры (рис. 132).

4. Некоторые свойства системы корней

Рассмотрим форму Киллинга на алгебре G. Для дальнейшего важно знать свойства базиса $\{E_\alpha\}$ в плоскости, дополнительной к T в G.

Предложение 11.2. *Пусть G_α — одномерное подпространство, натянутое на вектор E_α, где $\alpha \neq 0$. Тогда $[G_\alpha, G_\beta] \subset G_{\alpha+\beta}$, т. е. $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, где $N_{\alpha\beta}$ — некоторое число. Если $\alpha + \beta \neq 0$, то соответствующие векторы E_α и E_β ортогональны относительно формы Киллинга. Напротив, векторы E_α и $E_{-\alpha}$, где $\alpha \neq 0$ не являются ортогональными. Если α, β, $\alpha + \beta$ являются корнями алгебры G, не равными нулю, то имеет место соотношение $[G_\alpha, G_\beta] = G_{\alpha+\beta}$ т. е. $N_{\alpha\beta} \neq 0$. Единственными корнями, пропорциональными корню $\alpha \neq 0$, являются корни 0, $\pm\alpha$.*

Доказательство.

Пусть $G = sl(n, \mathbb{C})$. Так как $E_\alpha = T_{ij}$ то, коммутируя матрицы $E_\alpha = T_{ij}$ и $E_\beta = T_{pq}$, мы, очевидно, и получаем утверждение $[T_{ij}, T_{pq}] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, так как $N_{\alpha\beta} = 0$, если все индексы i, j, p, q различны и $[T_{ij}, T_{jq}] = T_{iq}$. Ясно, что $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$, так как если $E_\alpha = T_{ij}$, то $E_{-\alpha} = -T_{ji}$. Явный вид формы Киллинга на $sl(n, \mathbb{C})$ таков: $(X, Y) = \operatorname{Sp} X \cdot Y$. Поэтому если $\alpha + \beta \neq 0$, т.е. это означает, что соответствующие собственные векторы E_α и E_β изображаются матрицами T_{ij} и T_{pq}, ненулевые элементы в которых занимают разные места, а именно $(j, i) \neq (p, q)$, следовательно, $(E_\alpha, E_\beta) = \operatorname{Sp} T_{ij} \cdot T_{pq} = 0$. Таким образом, E_α и E_β ортогональны при $\alpha + \beta \neq 0$. Если же $\alpha + \beta = 0$, то векторы $E_\alpha = T_{ij}$ и $E_{-\alpha} = -T_{ji}$ не ортогональны, так как $(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \operatorname{Sp} T_{ij}(-T_{ji}) = -1$. Наконец, равенство $[G_\alpha, G_\beta] = G_{\alpha+\beta}$, где, например, $\alpha = \alpha_{ij}$, $i < j$, $\beta = \alpha_{pq}$, $p < q$, может иметь место в том и только в том случае, когда среди четырех индексов i, j, p, q есть два совпадающих: либо $j = p$, либо $i = q$. Это эквивалентно условию, что сумма корней $\alpha + \beta$ также является корнем. В самом деле, $\alpha_{ij}(h) + \alpha_{pq}(h) = (\alpha + \beta)h = a_i - a_j + a_p - a_q$ равняется $a_i - a_q$, если $j = p$, и равняется $a_p - a_j$, если $i = q$. Этот механизм показан на рис. 133, где корень $\alpha_{ij}(h) = a_i - a_j$, при $i < j$ изображен стрелкой, показывающей, что из a_i вычитается a_j. Утверждение доказано. ■

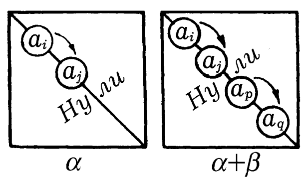

Рис. 133

Из явного вида формы Киллинга следует, что ограничение этой формы на подалгебру Картана невырождено. Следовательно, это ограничение определяет каноническое отождествление пространства T с дуальным (двойственным) к нему пространством T^*, совпадающим с пространством линейных функций на T. Таким образом, каждый корень α, являющийся линейной функцией на T, может быть однозначно представлен в виде некоторого вектора из T, т. е. существует единственный вектор H'_α. такой, что для всех $h \in T$ имеет место тождество $\alpha(h) = (h, H'_\alpha)$. Этот вектор H'_α, соответствующий корню α, будем также называть корнем. Тогда если $\alpha \neq 0$, то выполнено тождество $[E_\alpha, X] = (E_\alpha, X)H'_\alpha$, где $X \in G_{-\alpha}$ и $(\alpha, \alpha) \neq 0$. Для случая $sl(n, \mathbb{C})$ эти утверждения проверяются непосредственным вычислением (проверьте!).

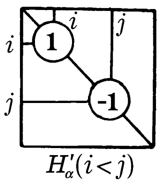

Рис. 134

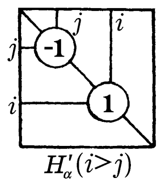

Рис. 135

Лемма 11.4. *Линейная оболочка всех корней* $\{H'_\alpha\}$, $\alpha \in \Delta$, $\alpha \neq 0$, *совпадает с картановской подалгеброй* T.

Доказательство.

Доказательство для $sl(n, \mathbb{C})$ следует из определения H'_α. В этом случае корень H'_α, где $\alpha = \alpha_{ij}$, $i < j$, изображается матрицей, показанной на рис. 134. Если $\alpha = \alpha_{ij}$, $i > j$, то H'_α см. на рис. 135. Итак, $H'_{\alpha=\alpha_{ij}} = T_{ii} - T_{jj}$. Отсюда следует, что линейная оболочка матриц $\{T_{ii} - T_{jj}\}$ совпадает с подалгеброй $T = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}T_{ii}$. Лемма доказана.

■

В то же время видно, что число корней больше, чем размерность T. Другими словами, корни образуют избыточный базис в T. Рассмотрим в T подпространство T_0, порожденное всеми векторами H'_α над полем вещественных чисел, т. е. T_0 — линейная оболочка $\{H'_\alpha\}$ с вещественными коэффициентами.

Лемма 11.5. *Ограничение формы Киллинга на подпространство T_0 невырождено. Более того, это ограничение является положительно определенной формой на T_0, принимающей вещественные значения. Кроме того, $\dim_{\mathbb{R}} T_0 = \dim_{\mathbb{C}} T = 1/2 \dim_{\mathbb{R}} T$, т. е. T_0 — «вещественная часть» картановской подалгебры T. Картановская подалгебра T представляется в виде прямой суммы $T = T_0 \oplus iT_0$, где i — мнимая единица, т. е. T является комплексификацией подалгебры $T_0 \subset T$.*

Доказательство.

Так как $(X, Y) = \operatorname{Sp} X \cdot Y$, то для $X = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$ имеем $(X, Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. Лемма доказана (для $G = sl(n, \mathbb{C})$). ■

В частности, все значения $\alpha_{ij}(h) = a_i - a_j$ вещественны на $T_0 \subset T$. Оказывается, в множестве всех корней возникает естественное упорядочивание, полезное при многих вычислениях. Выше мы обозначили через Δ множество всех ненулевых корней алгебры G. Пусть $H_1, \ldots, H_r$ какой-нибудь фиксированный базис в подалгебре $T_0 \subset T$, $r = \text{ранг}\, G$. Если λ и μ — две линейные функции на T_0, то говорят, что $\lambda > \mu$, если $\lambda(H_i) = \mu(H_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ и $\lambda(H_{k+1}) > \mu(H_{k+1})$. Напомним, что если λ и μ — корни алгебры, то их значения $\lambda(h)$ и $\mu(h)$ являются вещественными числами для любого $h \in T_0$, а поэтому неравенство $\lambda(H_{k+1}) > \mu(H_{k+1})$ имеет смысл. Таким образом, в множестве всех корней Δ возникает линейное упорядочивание (при фиксированном базисе).

Определение 11.5. Корень $\alpha \in \Delta$ называется *положительным*, если $\alpha > 0$, т. е. если $\alpha(H_i) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ и $\alpha(H_{k+1}) > 0$. Другими словами, положительность корня α эквивалентна тому, что первая его ненулевая координата (относительно базиса $\{H_i\}$) положительна.

Понятно, что описанное упорядочивание зависит от выбора базиса $H_1, \ldots, H_r$ в T_0; с изменением этого базиса изменится и упорядочивание. Для того чтобы устранить эту неоднозначность, будем считать, что базис $H_1, \ldots, H_r$ в T_0 выбран и фиксирован. Таким образом, в системе корней Δ выделяются две подсистемы: положительные корни, образующие множество $\Delta^+ \subset \Delta$, и отрицательные корни, образующие множество $\Delta^- \subset \Delta$. Очевидно, что $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ и $\Delta^+ \cap \Delta^- = \varnothing$.

Далее, существует взаимнооднозначное соответствие между множествами Δ^+ и Δ^-, устанавливаемое следующей инволюцией: $\alpha \to -\alpha$. Ясно, что если $\alpha \in \Delta^+$, то $-\alpha \in \Delta^-$.

Определение 11.6. Положительный корень $\alpha \in \Delta^+$ называется *простым*, если его нельзя представить в виде суммы двух других положительных корней.

Предложение 11.3. *Если G — полупростая алгебра Ли над полем комплексных чисел, то в подпространстве T_0 всегда существует базис из простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, где $r =$ ранг G. Эти же векторы образуют базис подалгебры T над полем $\mathbb{C}$. Кроме того, каждый корень $\alpha \in \Delta$ представим в виде суммы $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i\alpha_i$, где m_i — целые числа одного знака* (*или нули*); *при этом $m_i \geqslant 0$, если $\alpha \in \Delta^+$, и $m_i \leqslant 0$, если $\alpha \in \Delta^-$.*

Система простых корней обычно обозначается через Π.

Доказательство.

Пусть $G = sl(n, \mathbb{C})$, тогда в качестве простых корней можно взять корни $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1,n}$, т. е. $\alpha_{i,i+1}(h) = a_i - a_{i+1}$, где $1 \leqslant i \leqslant n-1$. При помощи формы Киллинга эти функционалы изображаются следующими векторами в подалгебре T_0 («вещественной части» алгебры Картана): $\alpha_1 = T_{11} - T_{22}$, $\alpha_2 = T_{22} - T_{33}$, $\dots$, $\alpha_{n-1} = T_{n-1,n-1} - T_{nn}$, здесь $r = n-1$ (рис. 136). Ясно, что это корни положительные и простые.

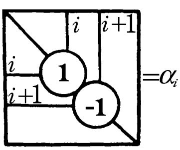

Рис. 136

Очевидно, далее, что любой корень $\alpha(h) = a_i - a_j$ разлагается по этому базису с целыми коэффициентами одного знака. При этом положительные корни $\alpha \in \Delta^+$ имеют вид α_{ij}, $i < j$ и изображаются в подалгебре T_0 векторами $T_{ii} - T_{jj}$, $i < j$, отрицательные корни $\alpha \in \Delta^-$ изображаются векторами $T_{ii} - T_{jj}$, $i > j$. Утверждение доказано. ■

Таким образом, в качестве первоначального базиса $H_1, \dots, H_r$, относительно которого было выше определено упорядочивание корней в Δ, можно взять теперь базис $H'_{\alpha_1}, \dots, H'_{\alpha_r}$, составленный из простых корней. В дальнейшем мы будем предполагать, что в подалгебре T_0 (над $\mathbb{R}$) и в алгебре T (над $\mathbb{C}$) фиксирован именно этот базис простых корней. Отметим, что этот базис не является ортонормированным. Именно это обстоятельство лежит в основе классификации простых алгебр Ли. Так, например, углы между простыми корнями и длины корней являются важной характеристикой алгебры

Ли. Фиксируем для дальнейших целей следующий замечательный базис в алгебре G.

Предложение 11.4. *В полупростой алгебре Ли G существует базис, составленный из векторов $H'_{\alpha_1}, \ldots, H'_{\alpha_r}$, являющихся простыми корнями алгебры и задающих базис в картановской подалгебре T (над $\mathbb{C}$), и из корневых векторов $\{E_\alpha\}$, где $E_\alpha \in G_\alpha$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \Delta$. При этом векторы E_α можно выбрать так, что будут выполняться следующие условия:*

1) $\mathrm{ad}_h E_\alpha = [h, E_\alpha] = \alpha(h) \cdot E_\alpha$, *где $h \in T$ и $\alpha(h) \in \mathbb{R}$, если $h \in T_0 \subset \subset T$;*

2) $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -H'_\alpha \in T$;

3) $[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} \cdot E_{\alpha+\beta}, & \text{если} \quad \alpha + \beta \neq 0, \quad \text{корень} \\ 0, & \text{если} \quad \alpha + \beta \neq 0, \quad \text{не корень} \end{cases}$

4) $(h, H'_\alpha) = \alpha(h)$, $h \in T$.

При этом можно считать, что $N_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$ не корень. Если $\alpha + \beta \neq 0$ корень, то $N_{\alpha\beta} \neq 0$. Векторы $E_\alpha \in G_\alpha$ можно выбрать так, что $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$. Постоянные числа $N_{\alpha\beta}$ можно считать вещественными. Этот базис $\{E_\alpha; H'_{\alpha_1}, \ldots, H'_{\alpha_r}\}$ называется базисом Вейля. Структура алгебры G полностью определяется тем самым заданием чисел $N_{\alpha\beta}$, т. е. геометрией корней $\{H'_\alpha\}$, реализованных векторами в T.

Доказательство этого предложения для случая $sl(n, \mathbb{C})$ нами фактически получено ранее. Корневое разложение алгебры G можно теперь записать в следующем виде: $G = T \oplus V^+ \oplus V^-$, где $V^+ = \sum\limits_{\alpha>0} G_\alpha$, $V^- = \sum\limits_{\alpha<0} G_\alpha$. В случае $sl(n, \mathbb{C})$ подпространство V^+, очевидно, отождествляется с подпространством всех верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали, подпространство V^- — с подпространством всех нижнетреугольных матриц с нулями на диагонали. Это разложение показано на рис. 137. Отметим, что скалярное произведение векторов базиса (порожденное формой Киллинга) устроено так: $\langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = 1$, $\langle E_\alpha, E_\alpha\rangle = 0$. Отсюда видно, в частности, что векторы E_α являются изотропными относительно невырожденной формы Киллинга. Это связано с тем, что форма Киллинга является индефинитной на комплексной алгебре G. В частности, ограничение этой формы на плоскости V^+ и V^- тождественно равно нулю, что следует из явного вида формы.

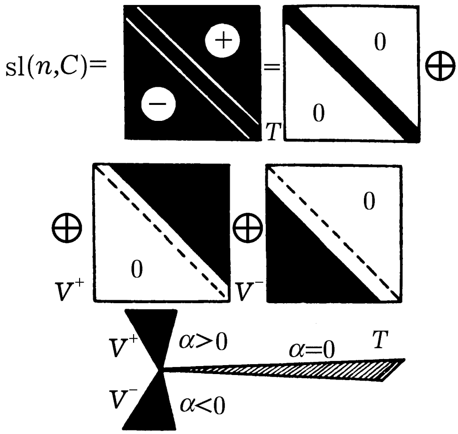

Рис. 137

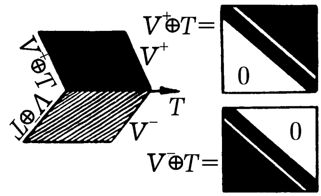

Рис. 138

Лемма 11.6. *Подпространства V^+ и V^- являются подалгебрами в алгебре Ли G. Эти подалгебры нильпотентные.*

Доказательство.

Пусть $E_\alpha, E_\beta \in V^+$, тогда в силу предложения 11.4 мы имеем $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, и так как $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $\alpha+\beta \neq 0$ и $\alpha+\beta > 0$, т. е. $E_{\alpha+\beta} \in V^+$, что и требовалось. В случае V^- рассуждение аналогично. Нильпотентность обеих подалгебр сразу следует из явного вида составляющих их матриц. ■

Лемма 11.7. *Подпространства $V^+ \oplus T$ и $V^- \oplus T$ являются подалгебрами в G. Эти подалгебры разрешимые.*

Доказательство также сразу следует из предложения 11.4. Отличие от леммы 11.6 состоит лишь в том, что добавляются коммутаторы вида $[H'_\alpha, E_\beta]$, которые совпадают с $\beta(H'_\alpha)E_\beta$ (рис. 138).

Задача 1. Докажите, что форма Киллинга тождественно равна нулю на алгебрах $V^+ \oplus T$ и $V^- \oplus T$. Следует отметить, что эта форма не совпадает с ограничением формы Киллинга, заданной на объемлющей полупростой алгебре G на плоскости $V^\pm \oplus T$.

Задача 2. Докажите, что если форма Киллинга некоторой алгебры Ли тождественно равна нулю, то алгебра разрешимая.

Мы остановились столь подробно на описании корней полупростой алгебры Ли в связи с тем, что имеет место следующая важная теорема (доказательство которой выходит за рамки нашего курса и приведено, например, в [7]).

Теорема 11.2. *Простая алгебра Ли G над полем $\mathbb{C}$ определяется с точностью до изоморфизма заданием системы корней в картановской подалгебре.*

Оказывается, все такие системы корней могут быть в явном виде перечислены, что и дает классификацию всех простых алгебр Ли.

5. Системы корней простых алгебр Ли

Из предыдущего пункта следует, что для задания простой алгебры достаточно задать ее систему корней Δ. Более того, поскольку в силу предложения 11.3 вся система Δ восстанавливается по подсистеме простых корней, то достаточно задать систему Π. Эта система векторов $H'_{\alpha_1}, \ldots, H'_{\alpha_r}$, где $r =$ ранг $G = \dim T$, определяется длинами векторов и углами, которые эти векторы образуют друг с другом. Мы приведем здесь основной результат классификации, предъявив в явном виде системы простых корней всех простых алгебр Ли. Пусть $\mathbb{R}^{n+1}$ — евклидово пространство, $\{e_i\}$ — ортобазис. Каждую систему Π мы изобразим в виде следующей удобной схемы-графа. Каждый вектор из Π изобразим точкой на двумерной плоскости, рядом с которой укажем квадрат длины этого вектора (корня) в метрике Киллинга на подалгебре T. Так как простые корни образуют базис в T, то их число равно рангу алгебры G. Теперь нужно указать углы, образуемые этими векторами друг с другом. Оказывается, эти углы не могут быть произвольными, более того, имеется мало вариантов, а именно $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$. Примем следующее удобное соглашение, позволяющее наглядно изобразить всю эту информацию графически. Если два вектора образуют друг с другом угол $\pi/6$, то соединим соответствующие им точки тремя параллельными отрезками (рис. 139). Если угол между векторами равен $\pi/4$, то соединим точки двумя отрезками, если угол равен $\pi/3$, то изобразим лишь один отрезок, и, наконец, если векторы ортогональны, то соответствующие им точки соединять отрезками не будем. Получившийся граф будем называть диаграммой корней (схемой корней). Ясно, что этот плоский граф позволяет полностью восстановить систему простых корней.

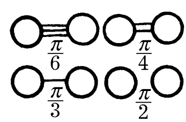

Рис. 139

Теорема 11.3. *Пусть $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — ортобазис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть G — простая алгебра Ли над полем комплексных чисел. Тогда система Π простых корней этой алгебры совпадает с одной из перечисленных ниже систем векторов в $\mathbb{R}^n$, где $n = \text{ранг}\, G$:*

1) $\Pi(A_n) = (e_1 - e_2, \ldots, e_n - e_{n+1}),\ n \geqslant 1$;
2) $\Pi(B_n) = (e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n,\ e_n),\ n \geqslant 2$;
3) $\Pi(C_n) = (e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n,\ 2e_n),\ n \geqslant 3$;
4) $\Pi(D_n) = (e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n,\ e_{n-1} + e_n),\ n \geqslant 4$;
5) $\Pi(G_2) = (e_1 - e_2,\ 2e_2 - e_1 - e_3)$;
6) $\Pi(F_4) = (e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_3,\ 1/2(e_4 - e_1 - e_2 - e_3))$;

$$7), 8), 9)\, \Pi(E_n) = (e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n, -(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}) + \\ + e_{n+1}(9/n - 1)^{1/2}),\ n = 6,\ 7,\ 8,$$

где $\overline{e_i} = e_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e_k$, т.е. вектор $\overline{e_i}$ является ортогональной проекцией вектора e_i на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n(e_1, \ldots, e_n)$, ортогональную вектору $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i$.

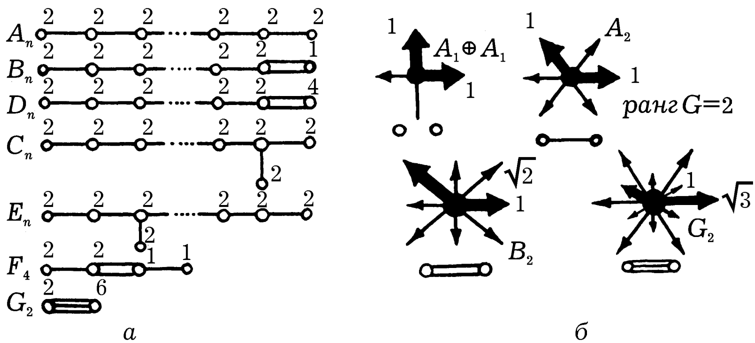

Рис. 140

Векторы каждой из перечисленных систем линейно независимы, и их линейная оболочка имеет размерность n, совпадающую с рангом алгебры Ли. Обратно, каждая из этих систем определяет простую алгебру Ли (над $\mathbb{C}$), причем разные системы определяют неизоморфные алгебры

Ли. При этом система $\Pi(A_n)$ определяет алгебру Ли $sl(n+1, \mathbb{C})$, система $\Pi(B_n)$ — алгебру $so(2n+1, \mathbb{C})$, система $\Pi(C_n)$ — алгебру $sp(n, \mathbb{C})$, система $\Pi(D_n)$ — алгебру $so(2n, \mathbb{C})$. Это — алгебры Ли классических серий. Остальные системы корней определяют особые алгебры Ли: система $\Pi(G_2)$ — алгебру $g_2(\mathbb{C})$ группы $G_2(\mathbb{C})$, система $\Pi(F_4)$ — алгебру $f_4(\mathbb{C})$ группы $F_4(\mathbb{C})$, система $\Pi(E_n)$, где $n = 6, 7, 8,$ — алгебры Ли $e_6(\mathbb{C})$, $e_7(\mathbb{C})$, $e_8(\mathbb{C})$ групп $E_6(\mathbb{C})$, $E_7(\mathbb{C})$, $E_8(\mathbb{C})$ соответственно. Диаграммы корней всех этих систем показаны на рис. 140.

Мы укажем также системы всех корней перечисленных выше простых алгебр Ли. Дело в том, что во многих прикладных вопросах кроме знания простых корней нужно знать систему всех корней алгебры. Хотя задания простой системы достаточно для восстановления всей системы корней, но эта процедура восстановления сопряжена с некоторыми техническими тонкостями, поэтому мы приведем здесь окончательный результат.

1) Серия A_n. Как мы уже видели при изучении модельного примера, все корни алгебры A_n нумеруются двумя индексами (i, j), где $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$, $i \neq j$; обозначим эти корни через α_{ij}. Тогда $\alpha_{ij} = e_i - e_j$. Простыми корнями являются векторы $\alpha_{i,i+1} = e_i - e_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n = \text{ранг} A_n$. Любой положительный корень $\alpha_{ij} \in \Delta^+$, где $i < j$, однозначно представляется в виде следующей суммы (разложение по простым корням):

$$\alpha_{ij} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \ldots + \alpha_{j-1,j} = \\ = e_i - e_{i+1} + e_{i+1} - e_{i+2} + \ldots - e_j = e_i - e_j.$$

2) Серия B_n. Простыми корнями являются векторы $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, и $\alpha_n = e_n$. Система всех корней задается так: $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$, где $i \neq j$. При этом система положительных корней восстанавливается в следующем виде: $e_i - e_j = a_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$; далее $b_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \ldots + 2\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$; и $c_i = \alpha_i + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$.

3) Серия C_n. В качестве простых корней можно взять векторы $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\alpha_n = 2e_n$, тогда положительные корни в их разложении по простым корням $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ имеют вид $a_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $i \neq j$, далее $b_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \ldots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$. При этом корень $b_{in} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$ можно формально включить в первую серию $\{a_{ij}\}$, положив $b_{in} = a_{i,n+1}$.

4) Серия D_n. Простыми корнями являются: $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant n-1$, $\alpha_n = e_{n-1} + e_n$. Положительные корни в их разложении по простым корням $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ имеют вид $a_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$, $1 \leqslant \leqslant i < j \leqslant n$, $i \neq j$; $b_{ij} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \ldots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$, $1 \leqslant \leqslant i < j \leqslant n$. Ясно, что b_{ij} можно записать так: $b_{ij} = e_i + e_j = (e_i - -e_{n-1}) + (e_j - e_n) + (e_{n-1} + e_n)$. При $j = n$ имеем $b_{in} = \alpha_i + \ldots + \alpha_{n-2} + +\alpha_n = e_i + e_n$.

5) Особая алгебра g_2. Простые корни: α_1, α_2. Положительные корни: α_1, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + 3\alpha_2$, $2\alpha_1 + 3\alpha_2$, $\alpha_1 + 2\alpha_2$.

6) Особая алгебра f_4. Корнями этой алгебры являются линейные функции:

$$\pm\omega_i \pm \omega_j,\ (i < j) = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ \pm\omega_i,\ \pm\Lambda_i,\ \pm M_i;$$

$$\Lambda_i = 1/2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) - \omega_i;\ M_1 = 1/2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4);$$

$$M_2 = 1/2(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4);$$

$$M_3 = 1/2(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4);\ M_4 = 1/2(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4).$$

Простыми корнями являются:

$$\alpha_1 = 1/2\omega_1 - 1/2\omega_2 - 1/2\omega_3 - 1/2\omega_4;\ \alpha_2 = \omega_4;$$

$$\alpha_3 = \omega_3 - \omega_4;\ \alpha_4 = \omega_2 - \omega_3.$$

7) Особая алгебра e_6. Корнями этой алгебры являются следующие линейные функции:

$$\pm\omega_i \pm \omega_j,\ (i < j) = 1,\ 2,\ 3,\ 4; \pm(\omega_i \pm 1/2(\omega_6 - \omega_5)),$$

$$\pm(\Lambda_i \pm 1/2(\omega_7 - \omega_5)),\ \pm(M_i \pm 1/2(\omega_7 - \omega_6)),$$

где функции Λ_i, M_i определены выше для алгебры f_4. Простые корни:

$$\alpha_1 = -\omega_1 + 1/2(\omega_6 - \omega_5),\ \alpha_2 = \omega_1 - \omega_2,\ \alpha_3 = \omega_2 - \omega_3,$$

$$\alpha_4 = \omega_3 + \omega_4,\ a_5 = -M_1 + 1/2(\omega_7 - \omega_6),\ \alpha_6 = \omega_3 - \omega_4.$$

8) Особая алгебра e_8. Простыми корнями являются $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$.

Рассмотрим множество следующих векторов:

$$\lambda_1 = 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,$$

$$\lambda_2 = 3(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= 3(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,\\
\lambda_4 &= 3(\alpha_4 + \alpha_5) + 2\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,\\
\lambda_5 &= 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,\\
\lambda_6 &= 2\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,\\
\lambda_7 &= -\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8,\\
\lambda_8 &= -\alpha_6 - 2\alpha_7 + \alpha_8.
\end{aligned}$$

Тогда система всех корней алгебры e_8 задается так:

$$\lambda_i - \lambda_j,\ \pm(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k),\ \pm(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_n),$$
$$\pm(2\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m + \lambda_n + \lambda_p + \lambda_q),$$

где все индексы различны и берутся из множества $(1, 2, \ldots, 8)$.

9) Особая алгебра e_7. Простые корни $\alpha_2, a_3, \ldots, \alpha_8$ получаются из корней алгебры e_8 вычеркиванием символа α_1. Далее, система всех корней алгебры e_7 получается из корней алгебры e_8 выбрасыванием всех сумм, перечисленных в предыдущем пункте и содержащих λ_1.

Возвращаясь к формулировке теоремы 11.3, отметим, что ограничения на ранг n (например, $n \geqslant 4$ для серии D_n) наложены для того, чтобы исключить из приведенного списка изоморфные алгебры Ли малых размерностей. Так, например, нам уже известно, что алгебры Ли so_3 и su_2 изоморфны. Оставляем читателю в качестве полезного упражнения доказательство следующих изоморфизмов: $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$, $D_2 = A_1 \oplus A_1$. Устранив из теоремы 11.3 эти алгебры, мы добились того, что все остальные перечисленные в теореме алгебры Ли попарно неизоморфны.

§ 12. Компактные группы

1. Вещественные формы

До сих пор мы изучали комплексные полупростые алгебры Ли. Однако большую роль играют также различные вещественные подалгебры, содержащиеся в этих алгебрах. Одна из них особенно замечательна, так как соответствующая ей группа Ли является компактной группой.

Определение 12.1. Пусть G — полупростая алгебра Ли над полем комплексных чисел. Вещественная подалгебра G_0 алгебры G (рассматриваемая как алгебра над полем $\mathbb{R}$) называется *вещественной формой* алгебры G, если каноническое отображение комплексного расширения $G_0^{\mathbb{C}} = G_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ алгебры G_0 в алгебру G является изоморфизмом. В этом случае мы имеем $\dim_{\mathbb{R}} G_0 = \dim_{\mathbb{C}} G$.

Это означает, что комплексифицируя вещественную алгебру G_0, т. е. рассматривая линейные комбинации ее элементов с комплексными коэффициентами, мы получаем всю объемлющую алгебру G.

Пусть G_0 — какая-либо вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли G. Тогда всякий элемент из G однозначно представляется в виде $X+iY$, где X, $Y \in G_0$. Это разложение алгебры G порождает естественную инволюцию σ, отображающую алгебру G в себя, а именно $\sigma(X+iY) = X - iY$. Эта инволюция зависит от подалгебры G_0 и обладает следующими очевидными свойствами: $\sigma^2 = 1_G$, $\sigma X = X$, если $X \in G_0$; $\sigma(A+B) = \sigma A + \sigma B$, A, $B \in G$; $\sigma(\lambda A) = \overline{\lambda}\sigma A$, $\sigma[A,B] = [\sigma A, \sigma B]$.

Лемма 12.1. *Пусть на алгебре G задана инволюция σ, обладающая перечисленными выше свойствами. Тогда эта инволюция определяет некоторую подалгебру G_0 в G, являющуюся вещественной формой.*

Доказательство.

Обозначим через G_0 множество неподвижных точек инволюции σ на G. Из свойств σ следует, что G_0 — вещественная подалгебра в G. С другой стороны, любой элемент A из алгебры G представляется в виде $X+iY$, где X, $Y \in G_0$. В самом деле, $A = \frac{1}{2}(A+\sigma A) + i\left(\frac{A-\sigma A}{2i}\right)$, где $X = 1/2(A+\sigma A) \in G_0$, $Y = \frac{1}{2i}(A - \sigma A) \in G_0$, так как $\sigma X = \sigma\left(\frac{A+\sigma A}{2}\right) = X$, $\sigma Y = \sigma\left(\frac{A-\sigma A}{2i}\right) = Y$. Лемма доказана. ■

Рассмотрим в алгебре G форму Киллинга $(\, , \,)_G$. Эту форму можно ограничить на вещественную подалгебру G_0; обозначим это ограничение так: $(\, , \,)'_{G_0}$. С другой стороны, на подалгебре G_0 определена своя форма Киллинга $(\, , \,)_{G_0}$. Естествен вопрос: совпадают ли эти две формы (с точностью до скалярного множителя)? Выше мы видели (см. § 11), что, вообще говоря, ограничение формы Киллинга объемлющей алгебры на произвольную подалгебру не совпадает с формой Киллинга этой подалгебры. Однако в случае вещественных форм ситуация более благоприятная.

Лемма 12.2. *Если G_0 — вещественная форма полупростой алгебры Ли G, то $(\, , \,)'_{G_0} = (\, , \,)_{G_0}$ (с точностью до постоянного множителя).*

Доказательство.

Согласно определению, форма Киллинга имеет вид $\mathrm{Sp}\,\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y$. Так как G_0 — «вещественная часть» алгебры G, то при X, $Y \in G_0$ эндоморфизм $\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y$ сохраняет подпространство G_0, поэтому след его ограничения на G_0 совпадает с формой Киллинга на G_0. В частности, форма Киллинга принимает вещественные значения на G_0. Лемма доказана.

■

2. Компактная форма

Определение 12.2. Вещественная алгебра Ли называется ***компактной***, если ее форма Киллинга отрицательно определена, т. е. квадратичная форма удовлетворяет неравенству $\langle X, X\rangle < 0$, если $X \neq 0$.

Определение 12.3. Вещественная форма G_0 комплексной алгебры Ли G называется ***компактной вещественной формой*** алгебры G, если G_0 — компактная вещественная алгебра.

Название «компактная алгебра» обусловлено тем, что, как оказывается, группа Ли, имеющая компактную алгебру Ли, сама является компактной как топологическое пространство (см. примеры ниже). Компактность вещественной формы G_0 может быть установлена, исходя из свойств формы Киллинга $\langle \, , \, \rangle_G$ на алгебре G.

Лемма 12.3. *Для того чтобы вещественная форма G_0 алгебры G была компактной, необходимо и достаточно, чтобы эрмитова форма $\langle A, \sigma A\rangle$ на алгебре G была отрицательно определена.*

Доказательство.

Пусть G_0 — компактна и $A = X + iY \in G$, тогда

$$\langle A, \sigma A\rangle = \langle X + iY, X - iY\rangle = \langle X, X\rangle + \langle Y, Y\rangle < 0.$$

Обратно, если форма $\langle A, \sigma B\rangle$ отрицательно определена, то при $A \in G_0$, $A \neq 0$ имеем $\sigma A = A$ и $\langle A, A\rangle < 0$. Лемма доказана. ■

В дальнейшем компактную форму будем обозначать через G_u. Вопрос о классификации всех вещественных форм алгебры G сводится к описанию всех неэквивалентных инволюций полупростых алгебр. Компактная форма, как оказывается, определяется одной специальной инволюцией, существующей на любой полупростой алгебре Ли.

Сначала рассмотрим модельный пример $sl(n, \mathbb{C})$. Рассмотрим на G инволюцию $\sigma A = \overline{A}$, т. е. операцию комплексного сопряжения матрицы A. Множество неподвижных точек этой инволюции совпадает, очевидно, с подалгеброй вещественных матриц, которая является алгеброй Ли $sl(n, \mathbb{R})$. Ясно, что форма Киллинга на алгебре $sl(n, \mathbb{R})$ является вещественной формой, записывающейся в виде $\langle X, X\rangle = \operatorname{Sp} X^2 = \sum\limits_{i,j} x_i^j x_j^i$. Эта форма, очевидно, не является отрицательно определенной (она индефинитна), поэтому $sl(n, \mathbb{R})$ вещественная, но не компактная форма алгебры $sl(n, \mathbb{C})$. Компактная форма G_u строится в данном примере так. Рассмотрим инволюцию $\tau\colon G \to G$, $\tau A = -\overline{A}^T$, где T — операция транспонирования. Неподвижными точками этой инволюции являются матрицы A такие, что $\overline{A}^T = -A$, т. е. множество неподвижных точек совпадает с пространством всех косоэрмитовых матриц. Как мы уже знаем, это пространство является алгеброй Ли группы SU_n, которая компактна. И в самом деле, вычисляя на этой вещественной форме G_0 форму Киллинга, получаем $\langle X, Y\rangle = \operatorname{Sp} XY = -\operatorname{Sp} X\overline{Y}^T$, т. е.

$$\langle X, X\rangle = -\operatorname{Sp} X\overline{X}^T = -\sum_{i,j} x_i^j \overline{x}_i^j < 0, \text{ если } X \neq 0.$$

В данном случае форма Киллинга совпала (с точностью до умножения на -1) со стандартным эрмитовым скалярным произведением. Таким образом, алгебра Ли su_n группы SU_n является компактной и в смысле определения 12.2.

Оказывается, рассмотрев случай алгебры $sl(n, \mathbb{C})$, мы смоделировали ситуацию, общую для всех комплексных простых алгебр Ли.

Теорема 12.1. *Каждая полупростая комплексная алгебра Ли G обладает компактной вещественной формой G_u.*

Доказательство.

Мы просто предъявим в явном виде вложение компактной подалгебры G_u в алгебру G. Само это вложение будет использоваться нами в дальнейшем, поскольку оно связано с многими геометрическими свойствами групп Ли. Рассмотрим базис Вейля в алгебре G (см. предложение 11.4). Рассмотрим на алгебре G инволюцию σ, задаваемую на базисе Вейля так: $\sigma E_\alpha = E_{-\alpha}$, если $\alpha \neq 0$, $\sigma h = -h$ для любого вектора $h \in T_0$, где $T_0 \subset T$ — «вещественная часть» подалгебры Картана T. При этом будем считать, что $\sigma(\lambda X) = \overline{\lambda}\sigma X$. Таким образом, отображение σ действует так, как это показано на рис. 141, т. е. $\sigma\colon V^+ \to V^-$, $\sigma\colon V^- \to V^+$, $\sigma\colon T_0 \to -T_0$, $\sigma\colon iT_0 \to iT_0$. Из свойств базиса Вейля (см. предложение 11.4) сразу следует, что σ — автоморфизм алгебры G. Так, например, если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то

$$\begin{aligned}\sigma[E_\alpha, E_\beta] = \sigma(N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha\beta}E_{-\alpha-\beta} = N_{-\alpha,-\beta}E_{-\alpha-\beta} =\\ = [E_{-\alpha}, E_{-\beta}] = [\sigma E_\alpha, \sigma E_\beta].\end{aligned}$$

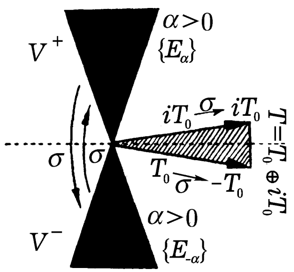

Рис. 141

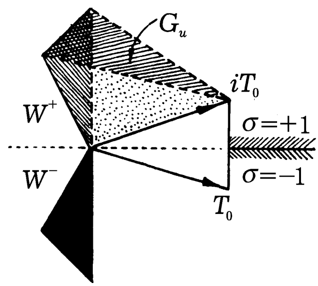

Рис. 142

Аналогичным образом проверяется сохранение и других коммутационных соотношений. Найдем теперь вещественную форму, отвечающую этой инволюции. Из явного вида σ следует, что в качестве базиса (над $\mathbb{R}$) в подалгебре неподвижных точек инволюции σ можно взять векторы $\{E_\alpha + E_{-\alpha};\ i(E_\alpha - E_{-\alpha});\ iH'_\alpha\}$. Мы утверждаем, что это есть компактная подалгебра в алгебре G. В самом деле, так как $\langle E_\alpha, E_\alpha\rangle = 0$ и $\langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = -1$, то достаточно вычислить следующие скалярные произведения:

$$\begin{gathered}\langle E_\alpha + E_{-\alpha}, E_\alpha + E_{-\alpha}\rangle = -2,\ \langle i(E_\alpha - E_{-\alpha}),\ i(E_\alpha - E_{-\alpha})\rangle =\\ = 2\langle E_\alpha, E_{-\alpha}\rangle = -2,\ \langle E_\alpha + E_{-\alpha}, i(E_\alpha - E_{-\alpha})\rangle = 0,\\ \langle iH'_\alpha, iH'_\alpha\rangle = -\alpha(H'_\alpha) < 0,\end{gathered}$$

так как $\alpha(H'_\alpha) > 0$ и вектор H'_α является двойственным к линейной форме α. Следовательно, форма Киллинга отрицательно определена на всей подалгебре неподвижных точек, что и доказывает компактность этой подалгебры. Теорема доказана. ■

Рассмотрим теперь более подробно вложение компактной формы G_u в G. В алгебре G можно выбрать, очевидно, следующий базис над $\mathbb{R}$:

$$\{E_\alpha + E_{-\alpha},\, i(E_\alpha - E_{-\alpha}),\, E_\alpha - E_{-\alpha},\, i(E_\alpha + E_{-\alpha}),\, H'_\alpha,\, iH'_\alpha\}.$$

Это означает, что наряду с корневым разложением алгебры $G = V^+ \oplus \oplus V^- \oplus T$ (над $\mathbb{C}$) имеется еще одно естественное разложение (над $\mathbb{R}$):

$$G = W^+ \oplus W^- \oplus T_0 \oplus iT_0, \text{ где } W^+ = \{E_\alpha + E_{-\alpha},\, i(E_\alpha - E_{-\alpha})\},$$
$$W^- = \{E_\alpha - E_{-\alpha},\, i(E_\alpha + E_{-\alpha})\},\, T_0 = \{H'_\alpha\},\, iT_0 = \{iH'_\alpha\}.$$

В фигурных скобках указаны векторы, образующие базис в соответствующей плоскости (рис. 142). Ясно, что $\sigma = +1$ на плоскости $W^+ \oplus iT_0$ и $\sigma = -1$ на плоскости $W^- \oplus T_0$. Следовательно, плоскость $W^+ \oplus iT_0$ является подалгеброй (в отличие от плоскости $W^- \oplus T_0$), и эта подалгебра неподвижных точек совпадает с компактной подалгеброй G_u в алгебре G, т. е. $G_u = W^+ \oplus iT_0$. Итак, установлено, что компактная алгебра Ли G_u в комплексной алгебре G натянута на векторы следующего вида:

$$G_u = \{E_\alpha + E_{-\alpha},\, i(E_\alpha - E_{-\alpha}),\, iH'_\alpha\} = W^+ \oplus iT_0.$$

Рассмотрим присоединенное действие алгебры Ли G_u на себе, т. е. изучим действие преобразований вида $\mathrm{ad}_h\colon G_u \to G_u$, где $h \in iT_0$. Так как элемент h лежит в картановской подалгебре, то преобразование ad_h переводит в себя плоскость W^+, ортогональную к плоскости iT_0. При этом мы пользуемся тем, что операторы ad_h кососимметричны относительно формы Киллинга, а потому сохраняют ортогональное дополнение, переводя его в себя. Пусть $h = iq$, где $q \in T_0$. Ясно, что $\mathrm{ad}_h(E_\alpha + E_{-\alpha}) = i\,\mathrm{ad}_q(E_\alpha + E_{-\alpha}) = i\alpha(q)(E_\alpha - E_{-\alpha})$, где $\alpha(q)$ — вещественное число (см. определение плоскости T_0 — «вещественной части» подалгебры Картана). Следовательно, $\mathrm{ad}_h(E_\alpha + E_{-\alpha}) = = \alpha(q)(i(E_\alpha - E_{-\alpha}))$. Аналогично, $\mathrm{ad}_h(i(E_\alpha + E_{-\alpha})) = -\alpha(q)(E_\alpha + E_{-\alpha})$. Следовательно, оператор ad_h переводит в себя двумерную вещественную плоскость, натянутую на векторы $E_\alpha + E_{-\alpha}$, $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$, и на этой плоскости задается следующей кососимметрической матрицей размера (2×2): $\mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(q) \\ -\alpha(q) & 0 \end{pmatrix}$, где $h = iq$. Итак, мы видим отличие действия оператора ad_h на компактной алгебре от аналогичного действия на комплексной алгебре Ли. Если в комплексном случае этот оператор приводился к диагональному виду в базисе, составленном из корневых векторов, то в вещественном случае этот оператор не имеет вещественных собственных векторов в ортогональном дополнении к картановской подалгебре iT_0, а приводится к блочно-диагональному виду, т. е. может быть записан в виде матрицы, по диагонали которой стоят блоки размера 2×2. Каждый из этих блоков соответствует одному корню (собственному числу над полем $\mathbb{C}$) и записывается указанной выше матрицей. В нашем модельном примере компактная алгебра $G_u = su_n$, где $G_u \subset G = sl(n, \mathbb{C})$, разлагается в прямую сумму следующих подпространств: $W^+ \oplus iT_0$, где

$$iT_0 = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_n \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 + \ldots + \varphi_n = 0;$$

φ_i — вещественные числа, $W^+ = \mathrm{Re}\, W^+ \oplus \mathrm{Im}\, W^+$, где

$$\mathrm{Re}\, W^+ = \{E_\alpha + E_{-\alpha}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathrm{Im}\, W^+ = \{i(E_\alpha - E_{-\alpha})\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & i \\ & \ddots & \\ i & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Двумерное инвариантное подпространство, натянутое на пару векторов $E_\alpha + E_{-\alpha}$, $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$, имеет в данном случае вид

$$\begin{pmatrix} 0 & & a+ib \\ & \ddots & \\ -a+ib & & 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$.

Роль построенного нами канонического вложения компактной подалгебры G_u в комплексную полупростую алгебру Ли G особенно возрастает ввиду наличия следующего факта: компактная форма единственна в G с точностью до автоморфизма алгебры G.

Предложение 12.1. *Пусть G_u и G'_u — любые две компактные вещественные формы полупростой алгебры Ли G над полем $\mathbb{C}$. Тогда существует такой автоморфизм ψ алгебры G, что $\psi G_u = G'_u$, причем этот автоморфизм включается в некоторую однопараметрическую подгруппу автоморфизмов ψ_t, где $\psi = \psi_1$, $\psi_0 = 1_G$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

Хотя этот факт полезен для понимания общей картины, он не будет нами использоваться, поэтому мы опускаем его доказательство.

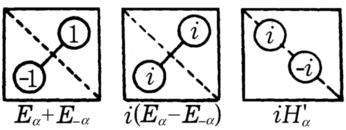

Рис. 143

Теперь рассмотрим наш модельный пример $sl(n, \mathbb{C})$. Выше мы полностью проанализировали структуру корневого разложения этой алгебры, поэтому сейчас для нас не составляет никакого труда в явном виде выписать канонические вложение компактной формы G_u в алгебру $sl(n, \mathbb{C})$. В самом деле, корневые векторы E_α совпадают с элементарными матрицами T_{pq}, $p < q$, если $\alpha > 0$, и с матрицами $-T_{pq}$, $p > q$, если $\alpha < 0$. Следовательно, $E_\alpha + E_{-\alpha} = T_{pq} - T_{qp}$; $i(E_\alpha - E_{-\alpha}) = iT_{pq} + iT_{qp}$ и, наконец, $iH'_\alpha = i(T_{pp} - T_{qq})$, если $\alpha(h) = a_p - a_q$, $p < q$ (рис. 143). Следовательно, подпространство iT_0 совпадает с подпространством всех диагональных чисто мнимых матриц со следом нуль:

$$iT_0 = \begin{pmatrix} i\varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\varphi_n \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 + \ldots + \varphi_n = 0, \quad \varphi_i \in \mathbb{R}$$

подпространство $\{E_\alpha + E_{-\alpha}\}$ совпадает с подпространством всех вещественных кососимметрических матриц, подпространство $\{i(E_\alpha - E_{-\alpha})\}$ совпадает с подпространством всех симметрических чисто мнимых матриц с нулями по диагонали. Окончательно подалгебра $G_u = W^+ \oplus iT_0$ совпадает с подпространством всех косоэрмитовых матриц со следом нуль, т. е. с алгеброй Ли группы su_n. Итак, нами доказана

Лемма 12.4. *Стандартное вложение подалгебры su_n в алгебру $sl(n, \mathbb{C})$ совпадает с каноническим вложением компактной формы G_u в G.*