Дж. Шварц

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

NOTES ON MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS
General Editors:
Jacob T. Schwartz
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York
Maurice Lévy
Université de Paris

DIFFERENTIAL GEOMETRY AND TOPOLOGY

by

JACOB T. SCHWARTZ

NEW YORK • 1968

Дж. Шварц

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Перевод с английского
В. Л. ГУТЕНМАХЕРА

Под редакцией
А. А. КИРИЛЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“
Москва 1970

Книга представляет собой курс лекций, прочитанных известным американским математиком Дж. Шварцем в 1965/66 г. Лаконичность и сравнительная простота изложения позволяют читателю быстро ознакомиться с основными понятиями дифференциальной геометрии и топологии. Начиная с общей теории многообразий, выясняя далее связь топологических инвариантов с инвариантами римановой метрики и переходя к K-теории, автор завершает изложение теоремой о векторных полях на сферах.

Книга представляет интерес для широких кругов математиков. Ее могут использовать студенты, аспиранты и преподаватели университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга Дж. Шварца написана на основе записок его лекций. Она входит в серию „Лекции по математике и ее приложениям“, редакторами которой являются Дж. Шварц (Нью-Йорк) и М. Леви (Париж). Серия задумана как собрание лишь немного обработанных конспектов новых математических курсов; на полную методическую отточенность до уровня учебников издания этой серии не претендуют.

Книга посвящена важному разделу современной математики — теории гладких многообразий. Автор поставил своей целью дать элементарное изложение геометрии и топологии многообразий на языке анализа. Книг такого рода до сих пор не существовало ни в отечественной, ни в зарубежной литературе. Реализацию этого замысла надо признать удачной. Отметим только, что автору не удалось достичь полной элементарности. Во многих местах автор явно или неявно предполагает у читателя довольно серьезное знакомство с теорией гомологий и когомологий. Поэтому читателю рекомендуется познакомиться с основами этой теории, например, по книге Стинрода и Эйленберга „Основания алгебраической топологии“.

Из нового материала, не вошедшего до сих пор в монографии, отметим связь кривизны и характеристических классов (гл. VII) и набросок доказательства известного результата Адамса о векторных полях на сферах. Книга написана с присущим автору педагогическим мастерством, весьма живо и неформально.

Я думаю, что русское издание этой книги будет хорошим подарком студентам, аспирантам и всем математикам, желающим ознакомиться с основами дифференциальной топологии и геометрии многообразий.

А. А. Кириллов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Предлагаемые конспекты сделаны по курсу лекций, прочитанному в 1965/66 учебном году. Мы надеемся, что несмотря на их фрагментарный характер, эти конспекты будут полезны студентам и всем желающим познакомиться с материалом, который они содержат.

Основная цель курса состоит в развитии и приложении методов теории пересечений для вычисления основных топологических инвариантов. Глава I содержит основные понятия дифференциальной топологии. Кроме того, в ней доказывается фундаментальная лемма Сарда, которая тут же применяется для доказательства теоремы Брауэра о неподвижной точке. В гл. II используется лемма Сарда, а также понятия трансверсальности, первоначально исследованные Рене Томом, для установления классических связей между теорией геометрических пересечений и группами гомологий. В следующей главе полученные результаты теории пересечений применяются к вычислению кольца когомологий многообразия Грассмана; установленные здесь факты дают основу для последующего обсуждения классов Уитни и Чжэня. Во второй части гл. III методы теории пересечений в сочетании с основными теоремами теории Морса используются для доказательства теоремы двойственности Пуанкаре. Глава IV содержит основные понятия и теоремы, относящиеся к теории расслоений, в частности векторных расслоений. В гл. V дается схема алгебраической теории спектральных последовательностей, а в гл. VI общие принципы, развитые в двух предыдущих главах, объединяются с методами теории пересечений из гл. III и обсуждаются характеристические классы векторных расслоений.

В следующей главе мы приводим некоторые основные формулы римановой геометрии; а затем, сопоставляя их с топологическим материалом, данным в предыдущих главах, приходим к чрезвычайно интересному обобщению теоремы Римана — Роха, сделанному Чжэнем.

Последующие главы служат кратким введением в обобщенную теорию когомологий и, в частности, в K-теорию, важная роль которой проявилась во многих недавних успехах топологии. Глава VIII начинается с простого доказательства того, что некоторое семейство гомотопических классов отображений определяет обобщенную теорию когомологий; далее на этой основе определяется K-теория как частный случай обобщенной теории когомологий. В гл. IX продолжается обсуждение K-теории, вводятся различные операции умножения, а также изучаются специальные свойства K-теории, которые следуют из теоремы периодичности Ботта. В третьей части гл. IX мы показываем, что классы Чжэня определяют гомоморфизм K-теории в обычную теорию когомологий. Этот факт затем используется, чтобы установить некоторые интересные свойства K-теории. Спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха для K-теории установлена в четвертой части гл. IX. Отображение этой спектральной последовательности характером Чжэня, рассмотренное в предыдущей части гл. IX, позволяет установить интересные связи между K-теорией и обычной теорией когомологий. В части 5 гл. IX приводятся введенные Адамсом операции K-теории. Заключительная гл. X дает неполный, но, возможно, полезный набросок доказательства результата Адамса о числе линейно независимых векторных полей на n-сферах.

Дж. Шварц

Глава I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

Мы начнем с понятия *дифференцируемого многообразия*. Для краткости будем называть его просто *многообразием*.

Определение 1. Сепарабельное[1]) метрическое пространство M с системой открытых множеств $\{U_\alpha\}$ называется *многообразием*, если

(I) $$M \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha;$$

(II) для каждого α существует отображение h_α множества U_α в m-мерное евклидово пространство E^m, причем h_α — гомеоморфизм множества U_α на открытый шар в E^m;

(III) для любых α и β отображение

$$h_\alpha h_\beta^{-1}\colon\ h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to E^m$$

гладко[2]), т. е. принадлежит классу C^∞.

Множества U_α называются *координатными окрестностями на* M, отображения $h_\alpha h_\beta^{-1}$ — *координатными преобразованиями*, а число m — *размерностью* многообразия M.

---

[1]) Обычно в общее понятие многообразия не включают условия сепарабельности, которое означает, что пространство содержит счетное плотное множество. Для метрических пространств сепарабельность эквивалентна существованию счетного базиса открытых множеств. — *Прим. перев.*

[2]) Отображение f открытого множества $A \subset E^m$ в E^m называется гладким, если координаты точки $f(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции от координат точки x. — *Прим. ред.*

К многообразиям применимы понятия обычного локального анализа. Например говорят, что отображение φ: $M \to M_1$ многообразия M в многообразие M_1 принадлежит *классу* C^∞ или *гладко* в точке $p \in M$, если существуют такие координатные окрестности $U_p \subseteq M$, $V_{\varphi(p)} \subseteq M_1$, что $p \in U_p$, $\varphi(p) \in V_{\varphi(p)}$ и композиция $g_{\varphi(p)}\varphi h_p^{-1}$: $h_p(U_p) \to E^{m_1}$ принадлежит классу C^∞ в точке $h_p(p) \in E^m$. Здесь отображение h_p ассоциировано с координатной окрестностью U_p, а $g_{\varphi(p)}$ — с $V_{\varphi(p)}$.

Можно также ввести понятие диффеоморфизма φ: $M \to M_1$ между M и M_1. Назовем отображение φ *диффеоморфизмом*, если оно гомеоморфизм класса C^∞ в каждой точке $p \in M$ и если обратное отображение φ^{-1} также принадлежит классу C^∞ в каждой точке $q \in M_1$.

Заметим, между прочим, что если φ: $M \to M_1$ есть отображение класса C^∞ в точке $p \in M$, то $g_\gamma \varphi h_\alpha^{-1}$: $h_\alpha(U_\alpha) \to E^{m_1}$ есть отображение класса C^∞ в точке $h_\alpha(p)$ для всех координатных окрестностей U_α, V_γ, у которых $p \in U_\alpha \subseteq M$, $\varphi(p) \in V_\gamma \subseteq M_1$. В самом деле, сужение отображения $g_\gamma \varphi h_\alpha^{-1}$ на соответствующую подобласть можно представить в виде

$$g_\gamma g_{\varphi(p)}^{-1} g_{\varphi(p)} \varphi h_p^{-1} h_p h_\alpha^{-1} = \\ = \left(g_\gamma \circ g_{\varphi(p)}^{-1}\right) \circ \left(g_{\varphi(p)} \circ \varphi \circ h_p^{-1}\right) \circ \left(h_p \circ h_\alpha^{-1}\right).$$

В силу условия (III) $g_\gamma g_{\varphi(p)}^{-1}$ и $h_p h_\alpha^{-1}$ — отображения класса C^∞, а отображение $g_{\varphi(p)}\varphi h_\alpha^{-1}$ принадлежит классу C^∞ по предположению. Следовательно, их композиция также принадлежит классу C^∞.

Таким образом, понятие дифференцируемости в точке инвариантно, т. е. не зависит от выбора координатных окрестностей.

Пусть f: $M \to E^1$ — гладкая функция во всех точках многообразия M. Говорят, что f *горизонтальна* в точке $p \in M$, если все ее первые частные производные по координатам обращаются в нуль в этой точке. Легко проверить, что понятие горизонтальности в точке инвариантно относительно координатных преобразований.

Определение 2. Пусть τ — линейный функционал, заданный на множестве вещественнозначных гладких функций на M. Если $\tau f = 0$ для всех функций f, горизонтальных в точке p, то τ называется *касательным вектором* к многообразию M в точке p.

Легко видеть, что этому определению эквивалентно

Определение 2′. Пусть τ — линейный функционал, заданный на множестве вещественнозначных гладких функций на M. Если $\tau(fg) = f(p)\tau(g) + g(p)\tau(f)$, то τ называется *касательным вектором* к многообразию M в точке p.

Если f — вещественная функция класса C^∞ от вещественного переменного, то с помощью интегрирования по частям получаем

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(s)\,ds =$$

$$= f'(0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^n(0) + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds.$$

Если g — вещественная функция класса C^∞ от m вещественных переменных, то, заменяя в этом равенстве $f(s)$ на $g(sx)$, где $x \in E^m$, получаем

$$g(x) = g(0) + \sum (\partial_i g)(0)\,x^i + \frac{1}{2!}\sum (\partial_{i_1 i_2} g)(0)\,x^{i_1} x^{i_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\sum \left(\partial_{i_1 \ldots i_n} g\right)(0)\,x^{i_1} \ldots x^{i_n} +$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n \sum \left(\partial_{i_1 \ldots i_{n+1}} g\right)(sx)\,x^{i_1} \ldots x^{i_{n+1}}\,ds,$$

где

$$\left(\partial_{i_1 \ldots i_l} g\right)(0) = \left.\frac{\partial^l g}{(\partial x^{i_1}) \ldots (\partial x^{i_l})}\right|_{x=0}, \qquad x = (x^1, \ldots, x^m).$$

Пусть $g\colon M \to E^1$ — гладкая функция. Говорят, что g *n-горизонтальна* в точке $p \in M$, если все ее частные производные по координатам до порядка n включительно обращаются в этой точке в нуль.

Очевидно, что интеграл в написанной выше формуле n-горизонтален в точке $x = (0, \ldots, 0)$, а $g(0)$ — константа. Сумму остальных членов называют главной частью функции $g(x)$.

Таким образом, вблизи $x = 0$ функция $g(x)$ представляется как сумма константы, главной части и n-горизонтальной части.

Определение 3. Пусть τ — линейный функционал, заданный на множестве вещественнозначных гладких функций на M. Если $\tau f = 0$ для всякой n-горизонтальной в точке p функции f, то τ называется *потоком*[1] *порядка n* (сокращенно *n-потоком*) на многообразии M в точке p.

Ясно, что касательный вектор является 1-потоком.

Выразим n-поток в координатах точки p. Пусть $g\colon M^m \to E^1$ — гладкая функция в точке $p \in M$, имеющей координаты $x^1 = 0, \ldots, x^m = 0$, и τ — произвольный n-поток в этой точке. Тогда $g(x) = C + p(x) + H_n(x)$ вблизи $x = 0$, где C — константа, $p(x)$ — главная часть функции $g(x)$ и $H_n(x)$ — ее n-горизонтальная часть.

По определению $\tau(H_n(x)) = 0$. Кроме того, так как константа C k-горизонтальна в точке p для всех $k \geqslant 1$, в том числе и для $k = n$, то $\tau(C) = 0$. В силу линейности τ

$$\begin{aligned}\tau(g) &= \tau(p(x)) = \\ &= \tau\Big(\sum (\partial_i g)(0)\, x^i + \ldots + \frac{1}{n!}\sum \big(\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} g\big)(0)\, x^{i_1} \ldots x^{i_n}\Big) = \\ &= \sum (\partial_i g)(0)\, \tau(x^i) + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{1}{n!}\sum \big(\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_n} g\big)(0)\, \tau\big(x^{i_1} \ldots x^{i_n}\big).\end{aligned}$$

---

[1]) В оригинале jet (струя). Поскольку n-струей обычно называют элемент факторпространства всех гладких функций по n-горизонтальным, мы используем термин «поток». — *Прим. перев.*

Полагая

$$\tau(x^i)=a_i(\tau),\ \ldots,\ \tau(x^{i_1}\ldots x^{i_n})=a_{i_1\ldots i_n}(\tau),$$

получаем

$$\tau(g)=\sum(\partial_i g)(0)\,a_i(\tau)+\ \ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\sum(\partial_{i_1\ldots i_n}g)(0)\,a_{i_1\ldots i_n}(\tau).$$

Вещественные числа $a_i(\tau),\ \ldots,\ a_{i_1\ldots i_n}(\tau)$ называются *координатами* n-потока τ в точке p. Для $n=1$

$$\tau(g)=\sum_{i=1}^{m}a_i(\tau)\frac{\partial g}{\partial x^i},\quad \text{или}\quad \tau=\sum a_i(\tau)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Очевидно, можно естественным образом определить сумму двух n-потоков τ, τ_1 и произведение n-потока на скаляр. Тем самым n-потоки в точке p образуют линейное пространство — *пространство n-потоков* в точке p. Пространство 1-потоков называется касательным пространством в точке p.

Если $f\colon N^n\to E^1$ — гладкая функция на N, то пишут $f\in C^\infty(N)$. Если отображение $\varphi\colon M^m\to N^n$ гладкое, то $f\in C^\infty(N)$ влечет $f\circ\varphi\in C^\infty(M)$.

Лемма 1. *Если функция $f\in C^\infty(N)$ k-горизонтальна в точке $q=\varphi(p)$, то $f\circ\varphi$ k-горизонтальна в точке p.*

Доказательство. Локально: $y_j=\varphi_j(x_1,\ldots,x_m)$ $(j=1,2,\ldots,n)$, где $(x_1,\ldots,x_m)$ — координаты в окрестности точки p, а $(y_1,\ldots,y_n)$ — координаты в окрестности точки q. Тогда

$$\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_i}=\frac{\partial f(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))}{\partial x_i}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial\varphi_j(x_1,\ldots,x_m)}{\partial x_i},$$

а так как $\left.\dfrac{\partial f(\varphi(x))}{\partial y_j}\right|_{x=0}=0$ для $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то $\left.\dfrac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_i}\right|_{x=0}=0$ для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Аналогично доказывается, что все производные функции $f \circ \varphi$ до порядка k включительно в точке $x=0$ обращаются в нуль.

Пусть τ будет k-потоком на M в точке p; положим $\hat{\tau}(f)=\tau(f \circ \varphi)$ для $f \in C^{\infty}(N)$. Из леммы 1 следует, что $\hat{\tau}$ будет k-потоком на N в точке $q=\varphi(p)$. Обозначим его через $\hat{\tau}=\varphi_*(\tau)$ и назовем *образом k-потока*. Очевидно, что

a) $\varphi_*(\tau+\tau_1)=\varphi_*(\tau)+\varphi_*(\tau_1)$,

b) 1-потоки $\subseteq$ 2-потоки $\subseteq$ 3-потоки $\subseteq \ldots$.

Определение 4. Если $\tau(p)$ — касательный вектор во всех точках $p \in M$, то τ называется *касательным векторным полем.*

Каждой функции $f \in C^{\infty}(M)$ сопоставим вещественнозначную функцию g, полагая $g(p)=\tau(p)(f)$, и это соответствие обозначим через T: $f \to g$. Если g — гладкая функция для всех $f \in C^{\infty}(M)$, то T называется *гладким векторным полем*. Очевидно, что $T(fg)=fTg+gTf$.

Аналогично можно определить *поле k-потоков.*

Лемма 2. *Если T_1 — поле k_1-потоков, а T_2 — поле k_2-потоков, то $(T_1T_2)f=T_1(T_2f)$ — поле (k_1+k_2)-потоков.*

Доказательство. Если поля T_1 и T_2 гладкие, то их композиция T_1T_2 также гладкая. Остается доказать, что в каждой точке $p \in M$ поле T_1T_2 будет (k_1+k_2)-потоком. Выше было показано, что в координатах точки p поле T_2 представляет собой дифференциальный оператор порядка k_2, а T_1 — дифференциальный оператор порядка k_1. Следовательно, T_1T_2 — дифференциальный оператор порядка k_1+k_2.

Пусть φ: $M \to N$ — гладкое отображение и $p \in M$. Обозначим через $\tau_p(M)$ касательное пространство в точке p. Мы показали, что существует линейное отображение φ_*: $\tau_p(M) \to \tau_{\varphi(p)}(N)$. Назовем *рангом отображения* φ в точке p размерность образа пространства $\tau_p(M)$ относительно φ_* и обозначим его через $\operatorname{rank}_p \varphi$.

Если x — координатный вектор на M в точке p, а y — координатный вектор на N в точке $\varphi(p)$, то φ можно локально записать в виде $\Phi(x)=y$. Легко показать, что линейное отображение φ_* представляется матрицей Якоби $\left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\Big|_{x=x(p)} \right\|$. Следовательно, $\operatorname{rank}_p \varphi$ равен рангу этой матрицы.

Замечание. Если $p_n \to p$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{rank}_{p_n} \varphi \geqslant$ $\geqslant \operatorname{rank}_p \varphi$.

Действительно, если U — координатная окрестность в точке p, то $p_n \in U$ для достаточно большого n. Пусть $\operatorname{rank}_p \varphi = r$, тогда матрица Якоби содержит ненулевой минор порядка r. Но поскольку определитель матрицы непрерывно зависит от ее элементов, этот минор вблизи точки p также не равен нулю. Заметим, однако, что матрица Якоби в точках p_n может содержать ненулевые миноры и большего порядка. Если она их не содержит, то говорят, что φ имеет локально постоянный ранг.

Если φ: $M^m \to N^n$, то максимально возможная величина $\operatorname{rank}_p \varphi$ равна $\min(m, n)$.

Когда $\operatorname{rank}_p \varphi$ максимален, p называется *регулярной* точкой отображения φ, в противном случае — *сингулярной* точкой.

Лемма 3. *Если в точке p отображение φ имеет локально постоянный ранг, то можно выбрать координаты в точках $p \in M$ и $\varphi(p) \in N$ так, что* $\Phi[\tilde{x}, \tilde{y}] = [\tilde{x}, 0]$.

Доказательство. Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — координатный вектор на M в точке p, а p — начало координат $x=0$. По условию $\operatorname{rank}_p \varphi = r$ в окрестности точки p, т. е. в окрестности $x=0$ матрица Якоби $\left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right\|$ содержит ненулевой $(r \times r)$-минор. Без ограничения общности можно считать, что вблизи $x=0$ отличен от нуля определитель

$$\det \left\| \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j};\ 1 \leqslant i, j \leqslant r \right\|.$$

Пусть

$$u_k = \Phi_k(x_1, \ldots, x_m), \qquad k = 1, 2, \ldots, r,$$
$$u_k = x_k, \qquad k = r+1, \ldots, m.$$

Тогда $u = (u_1, \ldots, u_m)$ можно взять в качестве нового координатного вектора на M в точке p. Действительно, якобиан преобразования $(x_1, \ldots, x_m) \to \to (u_1, \ldots, u_m)$ в точке $x = 0$ не равен нулю, и можно применить теорему о неявной функции. В новой координатной системе отображение φ представлено новой функцией $\Phi'(u)$,

$$\Phi'_k(u_1, \ldots, u_m) = u_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, r,$$

а новая матрица Якоби имеет вид

$$\left\| \frac{\partial \Phi'_i}{\partial u_j};\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m \right\| =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline * & \begin{matrix} \dfrac{\partial \Phi'_{r+1}}{\partial u_{r+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{\partial \Phi'_n}{\partial u_m} \end{matrix} \end{array} \right).$$

Так как ранг этой матрицы в некоторой окрестности точки $u = 0$ равен r, то в этой окрестности $\partial \Phi'_\alpha / \partial u_\beta = 0$ для α, $\beta > r$. Следовательно, для $\alpha > r$ функция $\Phi'_\alpha(u_1, \ldots, u_m)$ на самом деле зависит только от первых r координат $u_1, \ldots, u_r$, т. е. $\Phi'_\alpha(u_1, \ldots, u_m) = \Phi''_\alpha(u_1, \ldots, u_r)$.

Если y — координатный вектор на N в точке $\varphi(p)$, положим

$$z_k = y_k, \qquad k = 1, \ldots, r,$$
$$z_k = y_k - \Phi''_k(y_1, \ldots, y_r), \qquad k = r+1, \ldots, n.$$

Поскольку якобиан этого преобразования в точке p отличен от нуля, $(y_1, \ldots, y_n) \to (z_1, \ldots, z_n)$ есть координатное преобразование в точке $\varphi(p)$. В координатных системах u на M и z на N отображение φ представлено новой функцией $\tilde{\Phi}(u)$ и

$$\tilde{\Phi}_k(u_1, \ldots, u_m) = u_k, \qquad k = 1, \ldots, r,$$
$$\tilde{\Phi}_k(u_1, \ldots, u_m) = 0, \qquad k = r+1, \ldots, n.$$

А это и есть требуемый результат, если обозначить $\tilde{x} = (u_1, \ldots, u_r)$, $\tilde{y} = (u_{r+1}, \ldots, u_m)$.

Следствие 1. *Если* $\operatorname{rank}_p \varphi$ *максимален и* $m \geqslant n$, *то для заданных координат* x *на* N *в точке* p *можно выбрать координаты* $[x, y]$ *на* M *в точке* p *так, что* φ *имеет вид* $\Phi[x, y] = x$.

Следствие 2. *Если* $\operatorname{rank}_p \varphi$ *максимален и* $m \leqslant n$, *то для заданных* $[x, y]$ *на* N *в точке* $\varphi(p)$ *можно выбрать координаты* x *на* M *в точке* p *так, что* φ *имеет вид* $\Phi(x) = [x, 0]$.

Определение 5. Пусть M^m и V^v — многообразия и $v \leqslant m$, $V \subseteq M$. Многообразие V называется *подмногообразием* многообразия M, если V локально устроено как подпространство E^v в E^m. Это означает, что найдется система координатных окрестностей $\{U_\alpha\}$, покрывающих M, для которой $\{U_\alpha \cap V\}$ будет системой координатных окрестностей, покрывающих V, и если $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — координатный вектор на U_α, то $U_\alpha \cap V$ задается равенством $(x_{v+1}, \ldots, x_m) = (0, \ldots, 0)$.

Следствие 3. *Пусть* $\varphi\colon M^m \to N^n$, $m \geqslant n$. *Если* W — *подмногообразие в* N *и прообраз* $\varphi^{-1}(W)$ *содержит только регулярные точки отображения* φ, *то* $\varphi^{-1}(W)$ — *подмногообразие в* M *и* $\operatorname{codim} \varphi^{-1}(W) = \operatorname{codim} W$ [1]).

---

[1]) Через $\dim M$ обозначается размерность (dimension) множества M. Если $N \subset M$, то $\operatorname{codim} N$ в M (коразмерность множества N в M) определяется как $\dim M - \dim N$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $p \in \varphi^{-1}(W)$ — произвольная точка, $q = \varphi(p) \in W$. Тогда на N найдется такая координатная окрестность V в точке $\varphi(p)$ с соответствующим координатным вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)$, что $V \cap W$ — координатная окрестность на W в точке $\varphi(p)$ и сужение x на W имеет вид $(x_1, \ldots, x_w, 0, \ldots, 0)$. Согласно следствию 1, можно выбрать координаты $[x, y]$ в M так, что отображение φ будет задано функцией

$$\Phi[x_1, \ldots, x_w, x_{w+1}, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots, y_m] = = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно, если U — координатная окрестность на M в точке p, соответствующая координатному вектору $[x, y]$, то $\varphi^{-1}(W) \cap U$ имеет вид $[x_1, \ldots, x_w, 0, \ldots, 0, y_{n+1}, \ldots, y_m]$. А это и означает, что $\varphi^{-1}(W)$ — подмногообразие в M. И, наконец, $\operatorname{codim} \varphi^{-1}(W) = m - (w + (m - n)) = n - w = \operatorname{codim} W$.

Определение 6. Говорят, что подмножество e многообразия M *имеет меру нуль*, если образ $h_\alpha(e \cap U_\alpha)$ его пересечения с любой координатной окрестностью U_α имеет нулевую меру Лебега [1]).

Заметим, что множество меры нуль не содержит внутренних точек. В дальнейшем будут чрезвычайно полезны следующие леммы.

Лемма 4 (Сард). *Пусть φ: $M \to N$ — гладкое отображение, а $S \subseteq M$ — множество всех его сингулярных точек. Тогда $\varphi(S)$ имеет меру нуль.*

Лемма 5. *Всякое связное одномерное многообразие диффеоморфно либо открытому интервалу, либо окружности.*

Прежде чем приступать к доказательству этих лемм, покажем, как из них можно получить теорему Брауэра о неподвижной точке. Наше доказательство

---

[1]) Понятие меры Лебега, а также ее свойства, которыми автор пользуется в дальнейшем при доказательстве леммы, см., например, Колмогоров и Фомин [1]. — *Прим. перев.*

теоремы Брауэра не носит комбинаторного характера и позволяет проиллюстрировать силу дифференциального подхода к топологическим вопросам. Напомним, что в теореме Брауэра утверждается существование неподвижной точки у всякого непрерывного отображения на себя замкнутого n-мерного шара.

Обозначим через $B_r^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \|x\| \leqslant r\}$ замкнутый n-мерный шар радиуса r. Достаточно доказать эту теорему для дифференцируемых отображений. В самом деле, пусть $f\colon B_1^n \to B_1^n$ непрерывно и $\pi_\varepsilon\colon B_1^n \to B_{1-\varepsilon}^n$ — ретракция[1]) шара B_1^n на его подмножество $B_{1-\varepsilon}^n$,

$$\pi_\varepsilon(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \|x\| < 1-\varepsilon, \\ \dfrac{x}{\|x\|}(1-\varepsilon), & \text{если } \|x\| \geqslant 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $d(f, \pi_\varepsilon f) \leqslant \varepsilon$, где d — максимум по метрике. Рассмотрим отображения

$$\pi_{1/m} f\colon B_1^n \to B_{1-1/m}^n, \qquad m = 2, 3, \ldots .$$

По теореме Вейерштрасса о приближениях можно найти такие отображения φ_m класса C^∞, что $d(\pi_{1/m} f, \varphi_m) = 1/m$. Очевидно, что $\varphi_m(B_1^n) \subseteq B_1^n$.

Допустим, что теорема Брауэра верна для гладких отображений, т. е. найдется такая точка $x^m \in B_1^n$, что $\varphi_m(x^m) = x^m$, $m = 2, 3, \ldots$. Учитывая компактность шара B_1^n и переходя в случае необходимости к подпоследовательности, будем считать, что $x^m \to x_\infty \in B_1^n$. В силу непрерывности отображения f и неравенства треугольника $f(x_\infty) = x_\infty$.

Чтобы доказать теорему для гладких отображений, достаточно показать, что не существует гладкого отображения $\varphi\colon B_1^n \to \partial B_1^n$, сужение $\varphi|_{\partial B_1^n}$ которого было бы тождественным отображением $(\partial B_1^n = \{x \mid \|x\| = 1\})$. На доказательстве эквивалентности

[1]) Ретракцией множества A на его подмножество B называется непрерывное отображение $f\colon A \to B$, при котором $f(b) = b$ для всех $b \in B$. — *Прим. перев.*

этого утверждения теореме Брауэра мы не будем останавливаться, поскольку оно хорошо известно (см. например, Гуревич и Волмэн [1])[1]). Докажем теорему о несуществовании ретракции. Допустим противное и обозначим через $\varphi\colon B^n \to \partial B^n$ такое отображение. Гладкость φ означает, что найдется такая открытая окрестность $N(B^n)$ шара B^n, что продолжение отображения φ на нее принадлежит классу C^∞. (В дальнейшем, когда речь пойдет о многообразиях с краем, мы будем пользоваться именно таким определением дифференцируемости.)

Итак, $\varphi\colon N(B^n) \to \partial B^n$ — гладкое отображение n-мерного многообразия на $(n-1)$-мерное многообразие. Если S — множество его сингулярных точек, то по лемме Сарда $\varphi(S)$ имеет меру нуль. В частности, существует такая точка $p \in \partial B^n$, что $p \notin \varphi(S)$. Согласно следствию 3, $\varphi^{-1}(p)$ — одномерное подмногообразие в $N(B^n)$. Пусть K — его связная компонента, содержащая p. Возможны два случая (лемма 5):

(I) *Множество K диффеоморфно открытому интервалу.* Так как K замкнуто в $N(B^n)$, то $K \cap B^n$ замкнуто в B^n. Пусть $\{\eta(s)\colon -\infty < s < +\infty\}$ — некоторая параметризация интервала K и $\eta(0) = p$. Этот интервал „протыкает" ∂B^n в точке p, т. е. не может быть ни $K \subseteq B^n$, ни $K \subseteq N(B^n) - B^n$, так как иначе K касалось бы ∂B^n в точке p вопреки регулярности φ в этой точке. (Позднее мы встретим такую же ситуацию в более общем случае, когда будем говорить о трансверсальности.)

Поскольку $\eta(0) = p$, точки $\eta(-\varepsilon)$ для малых $\varepsilon > 0$ должны лежать либо внутри, либо вне B^n.

Пусть для определенности точка $\eta(-\varepsilon)$ находится внутри B^n. Тогда $\eta(s) \in \operatorname{Int} B^n$[2]) для всех $s < 0$. В самом деле, если это не так, то для некоторого

---

[1]) Если $f(x) \neq x$ для всех $x \in B_1^n$, то можно определить ретракцию $\varphi\colon B_1^n \to \partial B_1^n$ так: каждой точке $x \in B_1^n$ сопоставим точку $\varphi(x)$ пересечения с ∂B_1^n луча, исходящего из $f(x)$ и проходящего через x. Гладкость отображения φ легко следует из гладкости отображения f. — *Прим. перев.*

[2]) $\operatorname{Int} B^n = B^n - \partial B^n$ (внутренность шара B^n). — *Прим. перев.*

$s_0<0$ найдется точка $q=\eta(s_0)\in\partial B^n$. Если $q=p$, то множество K не диффеоморфно открытому интервалу, а потому $q\neq p$. С другой стороны, $q=\varphi(q)=$ $=\varphi(\eta(s_0))=p$, так как $\varphi|_{\partial B^n}$ — тождественное отображение. Таким образом, такой точки не существует. Аналогично доказывается, что $\eta(s)\in N(B^n)-B^n$ для всех $s>0$.

Рассмотрим множество точек $\eta(s)$ в B^n, $s<0$. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность вещественных чисел, монотонно сходящаяся к $-\infty$, и $\{\eta(s_n)\}$ — соответствующая точечная последовательность. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\eta(s_n)=p_\infty\in B^n$.

Так как $\varphi(\eta(s_n))=p$ для всех n, то $\varphi(p_\infty)=p$ в силу непрерывности φ. Тем самым $p_\infty\in\varphi^{-1}(p)\cap$ $\cap\overline{K}\cap B^n=K\cap B^n$, ибо $K\cap B^n$ замкнуто в B^n. А это противоречит тому, что K диффеоморфно открытому интервалу. Следовательно, случай (I) отпадает.

(II) *Множество K диффеоморфно окружности.* Так же, как и в случае (I), K не может лежать полностью ни внутри B^n, ни внутри $N(B^n)-B^n$. Но будучи диффеоморфным окружности, K пересекает ∂B^n по крайней мере в двух точках, т. е. $K\cap\partial B^n=\{p, q\}$, $q\neq p$. С другой стороны, из тех же соображений, что и в случае (I), получаем $q=\varphi(q)=\varphi(p)=p$. Таким образом, случай (II) тоже не годится.

Доказательство леммы 4. Пусть $p\in M$ и $q=\varphi(p)\in N$. Возьмем координатную окрестность V_q в точке q. В силу непрерывности φ найдется такая координатная окрестность U_p в точке p, что $\varphi(U_p)\subseteq V_q$. А для нее можно найти такую координатную окрестность U'_p в точке p, что $\overline{U}'_p\subseteq U_p$, $\overline{U}'_p$ — компакт, гомеоморфный m-мерному шару B^m, и U'_p гомеоморфно его внутренности $\operatorname{Int}B^m$.

Итак, $\varphi(U'_p)\subseteq V_q$ и V_q гомеоморфно некоторому открытому шару. Тем самым φ можно локально рассматривать как отображение $\operatorname{Int}B^m\to\operatorname{Int}B^n$.

По определению M — сепарабельное метрическое пространство, поэтому его можно покрыть счетным семейством координатных окрестностей вида U'_p.

Таким образом, доказав лемму Сарда для $\varphi\colon \operatorname{Int} B^m \to \operatorname{Int} B^n$, легко перейти к общему случаю, воспользовавшись полной аддитивностью меры.

Обозначим $\operatorname{Int} B^k$ через W^k. Покажем, что у отображения $\varphi\colon W^m \to W^n$ образ $\varphi(S)$ множества S всех сингулярных точек имеет меру нуль.

Заметим кстати, что поскольку $\varphi\colon W^m \to W^n$ представляет собой сужение соответствующего отображения компактов $\varphi\colon B^m \to B^n$, все функции и их производные равномерно непрерывны.

Случай 1: $m<n$. Покажем, что все множество $\varphi(W^m)$ имеет меру нуль. Представим W^m как объединение малых кубов со стороной ε (естественно, объем каждого такого куба равен ε^m). Можно выбрать ε-кубы так, чтобы их общее число не превосходило c/ε^m, где c — константа, не зависящая от ε (по существу c — объем множества W^m). Обозначим ε-кубы через $R_i^{(\varepsilon)}$. Тогда $\varphi(W^m) = \varphi\left(\bigcup\limits_i R_i^{(\varepsilon)}\right) = \bigcup\limits_i \varphi\left(R_i^{(\varepsilon)}\right)$. Так как φ дифференцируемо, то $\operatorname{diam}\left(\varphi\left(R_i^{(\varepsilon)}\right)\right) \leqslant K\varepsilon$, где K не зависит от ε. Следовательно, $\operatorname{Vol}\left(\varphi\left(R_i^{(\varepsilon)}\right)\right) \leqslant K'\varepsilon^n$, где K' не зависит от ε[1]). Наконец, $\operatorname{Vol}(\varphi(W^m)) \leqslant K'\varepsilon^n \frac{c}{\varepsilon^m} = K'c\varepsilon^{n-m}$, а это сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, так как $n>m$.

Случай 2: $m \geqslant n$. Пусть S_k — множество точек из W^m, в которых ранг отображения φ равен k. Очевидно, достаточно доказать, что $\varphi(S_k)$ имеет меру нуль для каждого $k<n$.

Пусть P — отображение пространства E^n в себя, проектирующее каждый n-вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ в $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, что $P\varphi$ по прежнему сингулярно на S_k.

[1]) $\operatorname{diam} B$ — диаметр множества B. Если $B \subset E^n$, то $\operatorname{diam} B = \max\limits_{x', x'' \in B} \rho(x', x'')$. $\operatorname{Vol} B$ — объем множества B. — *Прим. перев.*

Если лемма верна для S_k при $n=k+1$, то $P\varphi(S_k)$ имеет меру нуль (в соответствующем подпространстве). Хорошо известно из теории меры (непосредственное следствие теоремы Фубини), что если $P(e)$, где $e \subseteq E^n$, имеет меру нуль, то $P^{-1}(P(e))$ также имеет меру нуль. Но так как $e \subseteq P^{-1}(P(e))$, то e само имеет меру нуль. В нашем случае $\varphi(S_k)=e$ и, следовательно, $\varphi(S_k)$ имеет меру нуль. Остается поэтому доказать, что если $\varphi\colon W^m \to W^{k+1}$, то $\varphi(S_k)$ имеет меру нуль.

Проведем индукцию по m. Если $m=1$, то $k=0$, т. е. $\varphi\colon W^1 \to W^1$ — гладкое отображение открытого интервала на себя, а S_0 — множество точек, в которых $d\varphi(x)/dx=0$. Покроем S_0 множеством интервалов $R_i^{(\varepsilon)}$ так, чтобы общее число интервалов не превосходило c/ε, где c не зависит от ε. Тогда для каждого i диаметр множества $\varphi(R_i^{(\varepsilon)})$ не больше $K\varepsilon^2$, где K не зависит от ε. Действительно, пусть $x_0 \in R_i^{(\varepsilon)} \cap S_0$; тогда $d\varphi/dx\,|_{x=x_0}=0$. Если x — любая другая точка в $R_i^{(\varepsilon)}$, то в силу формулы Тейлора

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| \leqslant K\,|x-x_0|^2 \leqslant K\varepsilon^2,$$

следовательно, $\varphi(S_0) \subseteq \varphi\left(\bigcup R_i^{(\varepsilon)}\right) = \bigcup\limits_i \varphi\left(R_i^{(\varepsilon)}\right)$ и

$$\mathrm{Vol}\,(\varphi(S_0)) \leqslant \frac{c}{\varepsilon} K\varepsilon^2 = cK\varepsilon.$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\mathrm{Vol}\,(\varphi(S_0))=0.$$

Предположим теперь, что наше утверждение верно для всех целых чисел, меньших m, и докажем, что оно верно для m.

Пусть сначала $k=0$, т. е. $\varphi\colon W^m \to W^1$ — гладкая вещественнозначная функция, S_0^m — множество всех точек из W^m, в которых все частные производные функции φ до порядка m включительно равны нулю. Точно так же, как и в случае $m=1$, легко показать, что $\varphi(S_0^m)$ имеет меру нуль. Обозначим через $\widehat{S}_0^l$

множество точек из W^m, в которых все частные производные функции φ до порядка j равны нулю, а некоторые производные $(j+1)$-го порядка не равны нулю, т. е. если $p \in \widehat{S}_0^j$, то найдется такая функция $\psi = \partial^j \varphi$, что $\psi(p) = 0$, $\partial\psi(p) \neq 0$. Эта функция будет отображением $W^m \to W^1$, регулярным в точке p. Пусть U — окрестность точки p, в которой $\partial\psi(x) \neq 0$. Согласно следствию 3, множество $\psi^{-1}(0) \cap U$ представляет собой многообразие размерности $m-1$. Так как многообразие W^m сепарабельно, то $\widehat{S}_0^j$ содержится в счетном объединении его подмногообразий размерности $m-1$. По предположению индукции и в силу полной аддитивности меры $\varphi(\widehat{S}_0^j)$ имеет меру нуль. Наконец, $S_0 = \widehat{S}_0^1 \cup \widehat{S}_0^2 \ldots \cup \widehat{S}_0^{m-1} \cup \widehat{S}_0^m$ и, следовательно, $\varphi(S_0)$ имеет меру нуль.

Пусть теперь φ: $W^m \to W^{k+1}$, $k+1 \leqslant m$, $k > 0$. Мы хотим показать, что $\varphi(S_k)$ имеет меру нуль. В окрестности точки $p \in S_k$ найдется отличный от нуля $(k \times k)$-минор матрицы Якоби $\| \partial\Phi_j / \partial x_i \|$. По теореме о неявной функции можно выбрать так локальные координаты в точках p и $\varphi(p)$, что отображение φ будет иметь вид $\widetilde{\Phi}(x, y) = [x, f(x, y)]$. Здесь $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_{k+1}, \ldots, y_m)$ и $f(x, y)$ — вещественнозначная функция. Если U — координатная окрестность, соответствующая координатному вектору $[x, y]$, то ясно, что $S_k \cap U = \left\{ [x, y] \,\middle|\, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_j} = 0 \right\}$. В силу сепарабельности многообразия W^m множество S_k содержится в счетном объединении множеств вида $\left\{ [x, y] \,\middle|\, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_j} = 0 \right\}$. Следовательно, достаточно доказать, что мера образа (относительно φ) каждого такого множества равна нулю.

Далее, $\varphi(S_k) = \left\{ [x, t] \mid t = f(x, y), \ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_j} = 0; \ j = k+1, \ldots, m \right\}$. Зафиксируем $x = \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$ и рассмотрим множество $\left\{ [\bar{x}, t] \mid t = f(\bar{x}, y), \ \frac{\partial f(\bar{x}, y)}{\partial y_j} = 0; \right.$

$j=k+1, \ldots, m\}$. Для выбранного $\bar{x}$ можно рассматривать f как отображение координат $y_{k+1}, \ldots, y_m$ в вещественные числа $t=f(\bar{x}, y)$, т. е. $\tilde{f}$: $W^{m-k} \to W^1$.

Обозначим через $\tilde{S}_0$ множество синулярных точек отображения $\tilde{f}$. Ясно, что $\tilde{S}_0$ совпадает с множеством всех y, для которых $\frac{\partial f(\bar{x}, y)}{\partial y_j}=0, \quad j=k+1, \ldots, m$. Таким образом, мы снова пришли к случаю $k+1 \leqslant m$, $k=0$, для которого доказали, что $\varphi(\tilde{S}_0)$ имеет меру нуль. Так как $\varphi(\tilde{S}_0)$ есть множество $\Big\{[\bar{x}, t] \mid t=f(\bar{x}, y)$, $\frac{\partial f(\bar{x}, y)}{\partial f_j}=0, \quad j=k+1, \ldots, m\Big\}$, то мера последнего также равна нулю. Таким образом, пересечение множества $\varphi(S_k)$ с линией вида $\{[\bar{x}, t] \mid -t_1<t<t_2\}$ имеет меру нуль. По теореме Фубини $\varphi(S_k)$ само имеет меру нуль, и лемма 4 доказана.

Пусть $\mathscr{V}$ — гладкое векторное поле на гладком многообразии M. Если $\gamma(t)$ — дифференцируемая кривая на M, то, положив $\frac{d}{dt}\gamma(t) \circ f=\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$, получим касательный вектор в каждой точке $\gamma(t) \in M$. Пусть задана точка $p_0 \in M$ и мы хотим найти проходящую через нее дифференцируемую кривую $\gamma(t, p_0)$ с условием, что $\frac{d}{dt}\gamma(t) \circ f = \mathscr{V} \circ f$, т. е. решить уравнение $\frac{d}{dt}\gamma(t, p_0)=\mathscr{V}(\gamma(t, p_0))$ с начальным условием $\gamma(0, p_0)=p_0$. Переходя к локальным координатам, мы можем применить классическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробности см. Лефшец [2] (или Понтрягин [4]. — *Перев.*).

Доказательство леммы 5. Пусть M — связное одномерное многообразие и U — максимальная координатная окрестность на M, существование которой мы потом докажем. Очевидно, что U диффеоморфна открытому интервалу $(-1, 1)$. Выберем ее взаимно однозначную параметризацию $p(t)$, $-1<t<1$. Если U замкнута в M, то доказательство закончено. Действительно, если U открыта и замкнута в M, то в силу связности многообразие M совпадает с U, т. е. диффеоморфно открытому интервалу.

Если окрестность U не замкнута, то найдется такая последовательность $t_n \to 1$, что $p(t_n) \to p_1 \notin U$. Возьмем координатную окрестность $\hat{V}$ точки p_1. Эта окрестность содержит некоторую точку из U, скажем $p(A)$, $-1 < A < 1$. Теперь выберем другую координатную окрестность V точки p_1 так, чтобы компактное замыкание $\bar{V}$ содержалось в $\hat{V}$, и поскольку $\bar{V}$ диффеоморфно замкнутому интервалу, мы можем потребовать, чтобы один из его концов совпадал с $p(A)$. Очевидно, все точки $p(t)$ для $t > A$ лежат внутри V, а потому $p(t) \to p_1$ при $t \to 1$. Тогда пересечение $U \cap V$ имеет вид либо

a) $$\{p(t) \mid t > A\},$$

либо

b) $\{p(t) \mid t > A\} \cup \{p(t) \mid t < B$ для некоторого B,
$$-1 < B < 1\}.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что выполняется одно из следующих условий:

1) $p(t)$ не имеет предельной точки при $t \to -1$,

2) $p(t) \to p_{-1}$ при $t \to -1$ и $p_{-1} \neq p_1$,

3) $p(t) \to p_1$ при $t \to -1$, т. е. $p_{-1} = p_1$.

Если выполняется (1) или (2), то можно так выбрать V и $\varepsilon > 0$, чтобы $V \cap \{p(t) \mid t < -1 + \varepsilon\} = \varnothing$. В самом деле, в противном случае нашлась бы такая последовательность $p(t_n)$, $t_n \to -1$, что $p(t_n) \to p_1$. А это означает, что p_{-1} существует и $p_{-1} = p_1$. Таким образом, если выполняется (1) или (2), то $U \cap V$ имеет вид (a), если же выполняется (3), то вид (b).

Рассмотрим сначала случай (a). Докажем, что на $U \cup V$ существует векторное поле $\mathscr{V}$, которое (I) на U и в ее координатах положительно и ограничено; (II) на V и в ее координатах положительно и ограничено. Будем считать, что производная координатного преобразования от U к V положительна.

Если это не так, изменим направление координаты в окрестности V (т. е. если s — координата в V, заменим s на $-s$).

Построим векторное поле $\mathscr{V}_1$ на U, неотрицательное и ограниченное на U. Для этого построим вещественную функцию f_1 класса C^∞ на интервале $-1<t<1$, равную единице на $(-1, A]$ и гладко убывающую до нуля при $t\to 1$.

Обозначим через $\mathscr{V}_1$ векторное поле на U, имеющее в координатах вид $f_1(t)\dfrac{d}{dt}$. Пусть окрестность $\hat{V}$ диффеоморфна интервалу $-1<s<1$, а V задана неравенствами $-1/2<s<1/2$.

Построим теперь вещественную функцию f_2 класса C^∞ на интервале $-1<s<1$, равную 1 на $[-1/2, 1/2]$ и гладко убывающую в обе стороны до нуля при $s\to -1$ и $s\to +1$. Обозначим через $\mathscr{V}_2$ векторное поле на V, имеющее в координатах вид $f_2(s)\dfrac{d}{ds}$. Если положить $\mathscr{V}=\mathscr{V}_1+\mathscr{V}_2$, то $\mathscr{V}$, очевидно, будет удовлетворять условиям (I) и (II).

Возьмем $p_0\in U\cap V$ и рассмотрим уравнение $\dfrac{d\gamma(x, p_0)}{dx}=\mathscr{V}(\gamma(x, p_0))$ с начальным условием $\gamma(0, p_0)=p_0$. Пусть $\gamma(x, p_0)$ — его решение. Из положительности и ограниченности поля $\mathscr{V}$ следует, что $x\to\gamma(x, p_0)$ пробегает монотонно всю V и всю U. А тогда γ — взаимно однозначная параметризация их объединения $U\cup V$, что противоречит максимальности U. Значит, p_1 не существует, т. е. $U=M$.

Рассмотрим случай (b): $p(t)\to p_1$ при $t\to\pm 1$. Множество $K=\{p(t)\,|\,-1<t<1\}\cup\{p_1\}$ одновременно открыто и замкнуто, а потому $K=M$. Поскольку K гомеоморфно окружности, остается только доказать, что K еще и диффеоморфно окружности.

Итак, существует непрерывная параметризация $\theta\ (0\leqslant\theta<2\pi)$ многообразия M, задающая ориентацию любой координатной системы. Точнее говоря, можно покрыть M координатными окрестностями, чтобы производная каждого преобразования координат была положительной. Таким образом, имеет смысл понятие положительного векторного поля на M. Поскольку M компактно, можно построить на M (используя разбиение единицы) векторное поле $\mathscr{V}$, всюду положительное и ограниченное. Возьмем $p_0 \in U \cap V$, и пусть $d\gamma(x, p_0)/dx = \mathscr{V}(\gamma(x, p_0))$ — дифференциальное уравнение с начальным условием $\gamma(0, p_0) = p_0$. Область решения $\gamma(x, p_0)$ включает в себя $U \cup V$. Следовательно, функция γ не может быть взаимно однозначной и потому найдется $x_0 \neq 0$, для которого $\gamma(x_0, p_0) = \gamma(0, p_0)$. Тогда множество $\{\gamma(x, p_0) \mid 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$ будет окружностью, вложенной в M, и должно совпадать с M.

И, наконец, докажем существование максимальной координатной окрестности U в M. Воспользуемся леммой Цорна: возьмем возрастающую систему $\{U_n\}$ координатных окрестностей ($U_j \subseteq U_k$, если $j \leqslant k$). Поскольку M имеет счетную базу, нет необходимости рассматривать несчетные системы. Можно также считать, что производная любого преобразования координат положительна. Пусть $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Если мы покажем, что L покрыто одной координатной окрестностью, то этим докажем, что каждая система обладает верхней гранью, и можно будет применить лемму Цорна.

Построим на L положительное и ограниченное векторное поле. На каждой окрестности U_j такое векторное поле $\mathscr{V}_j$ существует. Мы можем даже считать, что все $\mathscr{V}_j$ ограничены сверху единицей. Тогда $\mathscr{V} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathscr{V}_n$ и будет искомым векторным полем. Из тех же соображений, что и раньше, получаем, что L покрыто одной координатной окрестностью, и лемма доказана.

Определение 7. Пусть M^m — многообразие. Если U и V — две его пересекающиеся координатные окрестности и якобиан преобразования координат от U к V положителен, то говорят, что U и V *положительно связаны*. Многообразие M называется ориентируемым, если его можно покрыть координатными окрестностями, каждые две из которых положительно связаны[1]). В противном случае многообразие M *неориентируемо*.

Часто бывает полезна следующая конструкция. Для каждого связного неориентируемого многообразия N существует связное ориентируемое многообразие $\hat{N}$, являющееся двулистным накрытием[2]) над N. Чтобы построить $\hat{N}$, рассмотрим семейство S всевозможных пар (p, U), где U — какая-нибудь координатная окрестность точки p. Возьмем два экземпляра S, скажем S_+ и S_-, т. е. $S_+ = \{(p, U)_+ \mid p \in U\}$, $S_- = \{(p, U)_- \mid p \in U\}$. Будем считать, что $(p, U)_+ = (q, V)_+$ и $(p, U)_- = (q, V)_-$ тогда и только тогда, когда $p = q$ и якобиан преобразования координат от U к V положителен в точке p, а $(p, U)_+ = (q, V)_-$ тогда и только тогда, когда $p = q$ и якобиан преобразования координат от U к V отрицателен в точке p. Обозначим через $\hat{N}$ множество пар, полученное из $S_+ \cup S_-$ посредством такого отождествления.

Введем на $\hat{N}$ топологию. Пусть $[(p, U)_+]$ — класс эквивалентности (т. е. элемент в $\hat{N}$), содержащий $(p, U)_+$. Определим окрестность точки $[(p, U)_+]$ как множество точек из $\hat{N}$ вида $[(q, U)_+]$, где q пробегает U. Аналогично для точки $[(p, U)_-]$. Легко проверить, что эти окрестности задают топологию на $\hat{N}$. Чтобы сделать $\hat{N}$ многообразием, возьмем в качестве координат около точки $[(p, U)_+]$ координаты на U,

---

[1]) Ориентируемое многообразие будет ориентировано, если фиксировать ориентацию в одной его координатной окрестности, а в остальных определить ориентацию так, чтобы все координатные окрестности были положительно связаны. — *Прим. перев.*

[2]) *Накрытием над пространством* B называется пара (E, p) пространства E и отображения $p: E \to B$, если p отображает E на все B и любая точка $b \in B$ обладает такой связной открытой окрестностью V, что каждая компонента ее прообраза открыта в E и p гомеоморфно отображает эту компоненту на V. Накрытие называется *двулистным*, если прообраз каждой точки относительно p состоит из двух точек. — *Прим. перев.*

а около точки $[(p, U)_-]$ — координаты на U с противоположной ориентацией, т. е. если $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты на U, то $(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ будут координатами около точки $[(p, U)_-]$. Тогда $\hat{N}$ будет многообразием класса C^∞. Легко видеть, что $\hat{N}$ ориентируемо и отображение $[(p, U)_\pm] \to p$ — двулистное дифференцируемое накрытие. Из неориентируемости N следует, что $\hat{N}$ связно.

Определение 8. Пусть A — замкнутое подмножество сепарабельного метрического пространства M. Если $M - A$ — многообразие, то M называется *относительным многообразием по модулю* A. Мы будем обозначать его (M, A) или (M/A).

Определение 9. Пусть $M \subseteq N$ (N — многообразие), $p \in M$. Точка p называется *j-угловой*, если существует в N ее координатная окрестность U, в координатах которой $M \cap U$ представляет собой j-угол в $E^n (n = \dim N)$, т. е. множество $\{x = [x_1, \ldots, x_n] \mid \|x\| < 1,\ x_1 \geqslant 0, \ldots, x_j \geqslant 0\}$, причем p соответствует началу координат $x = (0, 0, \ldots, 0)$.

Определение 10. *Многообразием с углами* называется пространство, каждая точка которого является j-угловой точкой для некоторого $j \geqslant 0$. Пространство, каждая точка которого 0-угловая или 1-угловая, называется *многообразием с краем*[1]).

Понятие j-угловой точки не зависит от координатной окрестности; в самом деле, если p есть j-угловая точка, то множество всех касательных в точке p векторов к многообразию с углами представляет собой $(m - j)$-мерное векторное пространство и его размерность инвариантна относительно любого невырожденного линейного преобразования. Если M^m — многообразие с краем ∂M, то ∂M представляет собой многообразие размерности $m - 1$. Дифференциальная структура на ∂M индуцируется многообразием M.

[1]) Краем называется множество 1-угловых точек. — *Прим. перев.*

Пусть M^m, A^a — многообразия, а N^n — подмногообразие в M^m. Локально, если $[x, y]$ — координаты на M, то N задается равенством $x=0$, т. е. $[0, y]$ — координаты на N.

Определение 11. Пусть φ: $A \to M$ — отображение класса C^∞. Говорят, что φ *трансверсально* к N в точке $q \in \varphi^{-1}(N)$, если

$$T_p(N) + \varphi_*(T_q(A)) = T_p(M).$$

Здесь $p=\varphi(q)$, $T_p(N)$ и $T_p(M)$ — касательные пространства, а φ_* — отображение касательных пространств, индуцируемое отображением φ[1]).

Отметим некоторые свойства трансверсальных отображений.

a) Если $\dim A + \dim N < \dim M$, то $N \cap \varphi(A) = \varnothing$.

b) Если $\dim A + \dim N = \dim M$, то точки q, для которых $\varphi(q) \in N$, изолированы в A.

c) Если P_x — проекция $[x, y] \to x$, то определение трансверсальности эквивалентно утверждению „$P_x\varphi$ регулярно в точке q“. (В этом случае регулярность отображения $P_x\varphi$ в q означает, что отображение $(P_x\varphi)_*$ надъективно.)

d) Если φ трансверсально к N в каждой точке прообраза $\varphi^{-1}(N)$, то $\varphi^{-1}(N)$ — подмногообразие в A и $\operatorname{codim} \varphi^{-1}(N)$ в A совпадает с $\operatorname{codim} N$ в M. Сформулированные утверждения следуют из приведенных выше лемм.

Определение 12. Пусть N, $\overline{N}$ — подмногообразия многообразия M, $N \cap \overline{N} \neq \varnothing$. Говорят, что N и $\overline{N}$ *трансверсальны* в их пересечении, если вложение i: $N \to M$ трансверсально к $\overline{N}$ в каждой точке, т. е. $T_p(N) + T_p(\overline{N}) = T_p(M)$, $p \in N \cap \overline{N}$.

Например, если $M=E^3$, N — плоскость $x_3=0$, $\overline{N}$ — прямая $x_1=0$, $x_2=0$, то N, $\overline{N}$ трансверсальны в точке $(0, 0, 0)$.

---

[1]) Кроме того, отображение φ по определению считается трансверсальным к N в точке $q \in A$, если $\varphi(q) \notin N$. Далее в пунктах a), b) имеется в виду отображение φ, трансверсальное к N во всех точках из A. — *Прим. перев.*

Лемма 6. *Если N, $\bar N$ трансверсальны и $p \in N \cap \bar N$, то можно так выбрать координаты в точке p, что оба многообразия N и $\bar N$ будут линейными подпространствами, в сумме дающими все пространство.*

Доказательство. Пусть $[x, y]$ — координаты на M в точке p, N задается как $[0, y]$, и пусть P_x: $[x, y] \to x$. Введем координаты z на $\bar N$, $i(z)$: $\bar N \to M$. Поскольку $P_x i$ регулярно в p, заменим координаты $z \to [u, v]$ так, чтобы $P_x i([u, v]) = u$ (см. свойство с)). Тем самым $i([u, v]) = [u, \psi(u, v)]$. Так как $\bar N$ вложено регулярно, то i имеет максимальный ранг и, следовательно,

$$[u, \psi(u, v)] = [u, \eta(u, v), x(u, v)], \quad \det\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right) \neq 0.$$

Заменим координаты в $\bar N$: $[u, v] \to [u, \eta]$. Тогда $i([u, \eta]) = [u, \eta, x(u, \eta)]$. Заменим координаты в M: $[u, \eta, x] \to [u, \eta, x - x(u, \eta)]$. Тогда $i([u, \eta]) = [u, \eta, 0]$, и лемма доказана.

Следствие. *Пересечение $N \cap \bar N$ является подмногообразием.*

Это очевидно, так как $N \cap \bar N$ представляет собой „плоскость“ в окрестности точки $p \in N \cap \bar N$.

Лемма 7. *Пусть φ: $M \to A$ и $N \subseteq M$, $B \subseteq A$ — подмногообразия. Если φ всюду трансверсально к B и $\varphi|_N$ всюду трансверсально к B, то N и $\varphi^{-1}(B)$ трансверсальны в M.*

Доказательство. Поскольку трансверсальность сводится к касательным пространствам, можно сформулировать лемму в линеаризованном виде: если $\bar N \subseteq \bar M$, $\bar B \subseteq \bar A$ (рассматриваемые как подпространства линейного пространства) и $\bar\varphi$: $\bar M \to \bar A$ — такое линейное отображение, что $\bar\varphi(\bar M) + \bar B = \bar A$ и $\bar\varphi(\bar N) + \bar B = \bar A$, то $\bar N + \bar\varphi^{-1}(\bar B) = \bar M$. Тогда если $\bar m$ — любая точка из $\bar M$, то $\bar\varphi(\bar m) = \bar a = \bar\varphi(\bar n) + \bar b$ влечет $\bar m - \bar n \in \bar\varphi^{-1}(\bar B)$.

Если M — многообразие с краем ∂M, мы всегда будем считать, что M содержится в некотором большем многообразии M_0. Отображение $\varphi\colon M \to A$ (A — многообразие) будем понимать как сужение отображения $\varphi\colon M_0 \to A$.

Пусть B — подмногообразие в A, φ всюду трансверсально к B и $\varphi|_{\partial M}$ всюду трансверсально к B в ∂M. Тогда $\varphi^{-1}(B)$ — подмногообразие в M_0 и по лемме 7 оно трансверсально к ∂M во всех точках пересечения с ∂M. Легко видеть, что $M \cap \varphi^{-1}(B)$ — многообразие с краем $\partial(M \cap \varphi^{-1}(B)) = \varphi^{-1}(B) \cap \partial M$.

Пример. Пусть выполнены условия двух предыдущих абзацев. Кроме того, будем считать, что *M компактно*, $B = \{b\}$ (т. е. состоит из одной точки) и $\dim M = 1 + \dim A$. Тогда $\varphi^{-1}(b)$ будет подмногообразием в M размерности 1 и, значит, объединением открытых дуг и окружностей; $\varphi^{-1}(b) \cap M = C$ будет семейством *замкнутых* дуг и окружностей, а ∂C — множеством точек в $\partial M \cap \varphi^{-1}(b)$, конечным, потому что M компактно, и четным, потому что пересечение открытой дуги или окружности с ∂M состоит из четного числа точек.

Этот пример будет играть важную роль в следующей главе, где речь будет идти о степени отображения.

Для удобства ссылок сформулируем его в виде леммы.

Лемма 8. *Пусть M — компактное многообразие с краем ∂M и A — многообразие той же размерности, что и ∂M. Пусть $\varphi\colon M \to A$ — гладкое отображение. Предположим, что точка $a \in A$ выбрана так, что φ и $\varphi|_{\partial M}$ трансверсальны к $\{a\} \subset A$. Тогда $\varphi^{-1}(a) \cap M$ распадается на некоторое число гладких замкнутых кривых, лежащих в $M - \partial M$, и некоторое число замкнутых дуг в M, пересекающих ∂M только в их концах. Эти дуги пересекают ∂M трансверсально, и все точки из $\varphi^{-1}(a) \cap \partial M$ служат их концами.*

Глава II

СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ И ТЕОРИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ

Определение 1. Пусть M, A — многообразия, оба размерности m. Пусть M компактно, а отображение φ: $M \to A$ принадлежит классу C^∞. Если φ трансверсально к $\{p\}$, $p \in A$, то четность числа точек в $\varphi^{-1}(p)$ называется *степенью отображения* $\varphi \pmod 2$ *в точке* p и обозначается $\deg_2(\varphi)|_p$ [1]).

Пусть M и A заданы в определении 1, а отображения ψ: $M \to A$, $\bar{\psi}$: $M \to A$ (гладко) гомотопны, т. е. существует такое отображение Ψ: $M \times [0, 1] \to A$, что $\Psi|_{M \times \{0\}} = \psi$, $\Psi|_{M \times \{1\}} = \bar{\psi}$. Здесь ψ, $\bar{\psi}$, Ψ — отображения класса C^∞. Отображение Ψ называется *гладкой* гомотопией.

Предположим, что все упомянутые отображения трансверсальны к подмногообразию $\{p\} \subset A$. Пространство $M' = M \times [0, 1]$ представляет собой многообразие с краем $\partial M' = (M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$ и $\dim M' = m + 1$. Из леммы 8 гл. I известно, что множество $\partial(\Psi^{-1}(p) \cap M')$ содержит четное число точек. Это означает, что если число решений уравнения $\Psi(x) = p$, где $x \in M \times \{0\}$, равно n_0, а число решений уравнения $\Psi(x) = p$, где $x \in M \times \{1\}$, равно n_1, то $n_0 \equiv n_1 \pmod 2$. Но $\Psi(x) = \psi(x)$ для $x \in M \times \{0\}$ и $\Psi(x) = \bar{\psi}(x)$ для $x \in M \times \{1\}$, следовательно, четность числа точек в прообразе $\psi^{-1}(p)$ равна четности числа точек в прообразе $\bar{\psi}^{-1}(p)$. Мы покажем дальше, что вовсе не

---

[1]) Четность числа определяется его остатком при делении на 2, т. е. гомоморфизмом кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел в кольцо $\mathbb{Z}_2$ вычетов по модулю 2. Таким образом, $\deg_2(\varphi)|_p$ принимает значения 0 и 1. — *Прим. перев.*

обязательно предполагать гомотопию Ψ трансверсальной к A в точке p. Таким образом, будет доказана

Теорема 1. $\deg_2(\varphi)|_p$ *является (гладким) гомотопическим инвариантом.*

Замечание. Из леммы об аппроксимации (см. стр. 44) следует, что два гомотопных гладких отображения гладко гомотопны.

Замечание. Пусть многообразия M и A компактны, а A еще и связно. Тогда множество $B \subseteq A$ всех точек p, для которых гладкое отображение φ: $M \to A$ трансверсально к $\{p\}$, открыто и всюду плотно (лемма Сарда).

Степень $\deg_2(\varphi)|_p$ одинакова для всех точек $p \in B$, поэтому ее называют просто *степенью отображения* $\varphi \pmod 2$. В самом деле, пусть x — система координат с началом в точке $a \in A$, и пусть V — шаровая окрестность точки a в этой системе координат. Возьмем две точки b_0 и b_1 в пересечении $V \cap B$. Легко построить диффеоморфизм ψ многообразия A на себя, при котором все точки множества $A - V$ остаются неподвижными, а b_0 переходит в b_1. Отображение ψ гомотопно тождественному отображению (см. лемму о гомотопии, стр. 44). Легко проверить, что степень отображения $\psi\varphi$ в точке b_1 равна степени отображения φ в точке b_0. Поскольку $\psi\varphi$ и φ гомотопны, их степени в точке b_1 совпадают. Таким образом, степень отображения φ во всех точках $b \in V \cap B$ одинакова. Поскольку A связно, а B всюду плотно в A, степень отображения φ одинакова во всех точках множества B.

Следствие. *Тождественное отображение компактного многообразия на себя и постоянное отображение* [1]) *не гомотопны.*

---

[1]) Постоянным отображением называется отображение в точку. Если прообраз точки пуст, то степень отображения в этой точке равна нулю. — *Прим. перев.*

В самом деле, степень первого отображения равна единице, а второго — нулю.

Определение 1. А. Предположим, что многообразия M и A из определения 1 ориентированы, а A еще и связно. Прообраз $\varphi^{-1}(p)$ состоит из конечного числа точек $m_1, m_2, \ldots, m_k$, в каждой из которых якобиан отображения φ отличен от нуля. Обозначим через $\varepsilon_i (= \pm 1)$ знак якобиана в точке m_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и назовем сумму $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k$ *степенью отображения* φ *в точке* p; обозначим ее $\deg(\varphi)|_p$.

Предложение. *Пусть M^{m+1} — компактное ориентированное многообразие с краем ∂M, A^m — компактное связное ориентированное многообразие и $\varphi: M \to A$ — такое гладкое отображение, что его сужение $\varphi|_{\partial M}$ трансверсально к точке p в A. Тогда степень отображения $\varphi|_{\partial M}$ в точке p равна нулю.*

Доказательство см. Понтрягин [3] [1]).

Теорема 1. А. $\deg(\varphi)|_p$ — *(гладкий) гомотопический инвариант отображений компактных ориентированных многообразий.*

Пусть X — метрическое пространство и $Y \subseteq X$. Если Y можно представить в виде суммы счетного числа нигде не плотных в X множеств, то Y называют *множеством первой категории*. Если множество $X - Y$ первой категории, то Y называют *превалентным множеством*. Если какое-то свойство верно для превалентного множества точек, то говорят, что оно верно *в большинстве точек*.

Любое многообразие M имеет метрику, делающую его полным метрическим пространством. Для компактного M это очевидно. В противном случае компактифицируем его одной точкой, т. е. берем $M \cup \{p_\infty\}$. Если $\rho(x, y)$ — полная метрика на $M \cup \{p_\infty\}$, положим

[1]) Доказательство этого предложения легко получить, используя лемму 8 гл. I и проследив за знаком якобиана отображения. — *Прим. ред.*

$\rho_1(x, y) = \rho(x, y) + \left|\rho(x, p_\infty)^{-1} - \rho(y, p_\infty)^{-1}\right|$ для $x, y \in M$. Тогда ρ_1 будет полной метрикой уже на M [1]).

Если M сепарабельно и локально компактно, то $M = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, где $K_1, K_2, \ldots$ — компакты, $K_1 \subset \operatorname{Int} K_2 \subset \subset K_2 \subset \operatorname{Int} K_3 \subset \ldots$. Рассмотрим множество непрерывных отображений пространства M в себя и положим

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\sup\limits_{p \in K_i} \rho(\varphi(p), \psi(p))}{1 + \sup\limits_{p \in K_i} \rho(\varphi(p), \psi(p))}.$$

Тем самым множество отображений из M в M становится полным метрическим пространством. Очевидно, сходимость в метрике d есть не что иное, как равномерная сходимость на компактных подмножествах.

Если M — многообразие, обозначим через $J_k(M)$ совокупность всех k-потоков во всех точках из M и назовем ее *пространством k-потоков многообразия M*. Это пространство можно сделать многообразием. Для $k = 1$ оно называется *касательным пучком* [2]) многообразия M и его размерность равна $2m$. Введем координаты на $J_1(M)$: если (m^0, α^0) — пара из $J_1(M)$, где $m^0 \in M$, а α^0 — касательный вектор в m^0, то существует координатная окрестность U точки m^0 с координатами $(x_1, \ldots, x_m)$. Пусть $\pi\colon J_1(M) \to M$ — отображение, определенное равенством $\pi(\tilde{m}, \alpha) = \tilde{m}$. Тогда $\pi^{-1}(U)$ представляет собой множество всех пар $(\tilde{m}, \alpha)$, у которых $\tilde{m} \in U$. Если $(\tilde{m}, \alpha) \in \pi^{-1}(U)$, то $\tilde{m} = (x_1, \ldots, x_m)$ и

$$\alpha = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

---

[1]) Это рассуждение не вполне корректно, так как пространство, получаемое в результате компактификации, не будет, вообще говоря, многообразием. Однако на нем можно ввести такую метрику ρ_1, в которой оно полно. Этого достаточно для завершения доказательства. — *Прим. ред.*

[2]) Точнее, пространством касательного пучка или касательного расслоения (см. стр. 85). — *Прим. перев.*

Отображение

$$(\tilde{m}, \alpha) \to (x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

взаимно однозначно переводит $\pi^{-1}(U)$ на открытое подмножество пространства E^{2m}. Существует единственная топология на $J_1(M)$, для которой это отображение будет гомеоморфизмом. Возьмем $\{\pi^{-1}(U)\}$ в качестве координатных окрестностей пространства $J_1(M)$, а гомеоморфизмы

$$(\tilde{m}, \alpha) \to (x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

в качестве координатных отображений. Оставляем читателю самому проверить, что эти координатные окрестности согласованы друг с другом.

Структура многообразия на $J_k(M)$ вводится аналогично.

Пусть ρ_k — полная метрика на $J_k(M)$. Отображение φ: $M \to M$ индуцирует отображение φ_*: $J_k(M) \to J_k(M)$ (гл. I). Введем полную метрику d_k на $J_k(M)$ и положим $\bar{d}_k(\varphi, \psi) = d_k(\varphi_*, \psi_*)$. Сходимость в метрике $\bar{d}_k$ есть не что иное, как равномерная сходимость на компактных подмножествах по всем производным до порядка k включительно.

Наконец, положим

$$\bar{d}_\infty(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\bar{d}_k(\varphi, \psi)}{1 - \bar{d}_k(\varphi, \psi)}.$$

Сходимость в этой метрике есть не что иное, как равномерная сходимость по всем производным на компактных подмножествах. Метрика $\bar{d}_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$) определяет C^k-топологию. Заметим, что все определенные выше метрики полны.

Лемма 1 (вспомогательная). *Пусть ψ, φ: $(M^m, A) \to N^m$, $p \in N^m - \varphi(A)$, M компактно, а φ трансверсально к $\{p\}$. Если ψ достаточно близко к φ в C^1-топологии, то число точек в $\psi^{-1}(p)$ равно числу точек в $\varphi^{-1}(p)$.*

Доказательство. Поскольку M компактно, $\varphi^{-1}(p)$ состоит только из конечного числа точек, скажем $q_1, \ldots, q_k$. Окружим каждую точку q_j координатной окрестностью U_j так, чтобы $U_j \cap U_i = \varnothing$ $(i \neq j)$. Это можно сделать, потому что каждая точка q_j принадлежит многообразию $M - A$. Тогда $\varphi\left(M - \bigcup_{j=1}^{k} U_j\right) \not\ni p$ и для отображения ψ, достаточно близкого к φ (даже в C^0-топологии), $\psi\left(M - \bigcup_{j=1}^{k} U_j\right) \not\ni p$. Мы хотим показать, что если ψ достаточно близко к φ в C^1-топологии, то каждая окрестность U_j содержит единственную точку прообраза $\psi^{-1}(p)$. В самом деле, так как φ трансверсально к $\{p\}$ в точке q_j, то

$$T_p(\{p\}) + \varphi_*\left(T_{q_j}(M)\right) = T_p(N),$$

а так как $T_p(\{p\})$ 0-мерно, то $\varphi_*\left(T_{q_j}(M)\right)$ должно быть m-мерно. Следовательно, якобиан отображения φ отличен от нуля, и так как ψ близко к φ в C^1-топологии, то якобиан отображения ψ в точке q_j также отличен от нуля. По теореме о неявной функции ψ отображает U_j диффеоморфно на окрестность точки p и, в частности, существует единственная точка $x_j \in U_j$, в которой $\psi(x_j) = p$.

Следствие. *Пусть многообразия из вспомогательной леммы ориентированы. Если считать точку в $\varphi^{-1}(p)$ со знаком плюс, когда якобиан отображения φ в ней положителен, и со знаком минус в противоположном случае, то утверждение леммы остается верным.*

Лемма 2. *Пусть N — компактное связное многообразие и φ: $N \to N$ — диффеоморфизм на себя. Если ψ достаточно близко к φ в C^1-топологии, то ψ — также диффеоморфизм на себя.*

Доказательство. Так как отображение φ_* нигде не вырождено, то ψ_* по условию также обладает этим свойством. Поэтому ψ локально взаимно однозначно и по теореме о неявной функции отображает открытые множества на открытые. Поскольку N

компактно, ψ переводит замкнутые множества в замкнутые. Из связности N получаем $\psi(N)=N$. Остается показать, что ψ глобально взаимно однозначно. Допустим, что это не так. Тогда существуют последовательность отображений $\{\psi_n\}$, стремящаяся к φ в C^1-топологии, и последовательности точек $\{q_n\}$, $\{q'_n\}$, для которых $\psi_n(q_n)=\psi_n(q'_n)$. Используя компактность многообразия N и переходя в случае необходимости к подпоследовательностям, получаем $q_n \to q_\infty$, $q'_n \to q'_\infty$. Очевидно, что $\varphi(q_\infty)=\varphi(q'_\infty)$. Следовательно, $q_\infty = q'_\infty$. Но тогда для достаточно большого n точки q_n и q'_n лежат в одной координатной окрестности вопреки тому, что ψ_n локально взаимно однозначно.

Пусть $\mathcal{M}$ — пространство всех отображений $\varphi\colon N \to N$ с C^∞-топологией. Лемма 2 показывает, что множество $D \subseteq \mathcal{M}$, состоящее из диффеоморфизмов на себя, открыто. Пусть $d_\infty(\varphi, \psi)$ — полная метрика в пространстве C^∞-отображений $N \to N$. Положим

$$\hat{d}_\infty(\varphi, \psi) = d_\infty(\varphi, \psi) + \\ + \left| \Big(\inf_{K \in \mathcal{M}-D} d_\infty(\varphi, K)\Big)^{-1} - \Big(\inf_{K \in \mathcal{M}-D} d_\infty(\psi, K)\Big)^{-1} \right|,$$

где $\varphi, \psi \in D$. Тогда $\hat{d}_\infty$ — полная метрика на D.

Лемма 3 (о шевелении[1]). *Пусть $\Psi\colon M^m \to N^n$ — отображение класса C^∞, а V — подмногообразие многообразия N. Если M и N компактны, то диффеоморфизмы η многообразия N на себя, для которых композиция $\eta\Psi$ трансверсальна к V, образуют превалентное открытое подмножество в D.*

Следствие. *Пусть $\varphi, \psi\colon M^m \to N^m$ — гладко гомотопные отображения и $p \in N$. Если φ и ψ трансверсальны к $\{p\}$, то четность числа точек в прообразе $\varphi^{-1}(p)$ совпадает с четностью числа точек в $\psi^{-1}(p)$.*

Доказательство следствия. Обозначим через Φ гомотопию между φ и ψ. Согласно лемме

---

[1]) В оригинале jiggling. — *Прим. перев.*

о шевелении, существует диффеоморфизм η многообразия N на себя, близкий к тождественному и такой, что $\eta\Phi$, $\eta\varphi$, $\eta\psi$ трансверсальны к N в точке $\{p\}$. Далее, $\eta\varphi$ и $\eta\psi$ гладко гомотопны (посредством гомотопии $\eta\Phi$) и можно использовать замечания, предшествующие теореме 1. Тем самым четность числа точек в $(\eta\varphi)^{-1}(p)$ совпадает с четностью числа точек в $(\eta\psi)^{-1}(p)$. Поскольку η близко к тождественному отображению, можно применить вспомогательную лемму к отображениям φ, $\eta\varphi$, а также и к отображениям ψ, $\eta\psi$.

Доказательство леммы о шевелении. Для того чтобы доказать, что множество диффеоморфизмов η многообразия N, для которых $\eta\psi$ трансверсально к V, превалентно, достаточно доказать превалентность множества $\mathrm{TR}(U)$ диффеоморфизмов η, для которых сужение отображения $\eta\psi$ на некоторую малую координатную окрестность U в M трансверсально к V.

Если η близко к тождественному отображению, то $\eta\psi(U) \subseteq W$, где W — фиксированная координатная окрестность на N. Выберем координаты $[x, y]$ в W так, чтобы V локально задавалось уравнением $y = 0$. Пусть P — проекция $[x, y] \to y$. Трансверсальность сужения отображения $\eta\psi$ на U означает, что в каждой точке из $(P\eta\psi)^{-1}(0)$ матрица Якоби отображения $P\eta\psi$ имеет максимальный ранг, т. е. содержит отличный от нуля $(r \times r)$-минор, где r — наибольшее возможное число. Ясно, что множество $\mathrm{TR}(U)$ открыто. Для того чтобы доказать, что оно плотно, достаточно показать, что в любой окрестности тождественного отображения найдется такой диффеоморфизм η_0, что $P\eta_0\psi$ имеет в каждой точке из $(P\eta_0\psi)^{-1}(0)$ матрицу Якоби максимального ранга.

Пусть Σ — множество точек из U, в которых $P\psi$ не имеет максимального ранга. По лемме Сарда $P\psi(\Sigma)$ — множество меры нуль. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой вектор δ с нормой $\|\delta\| < \varepsilon$, что $\delta \notin P\psi(\Sigma)$, т. е. матрица Якоби отображения $P\psi$

имеет максимальный ранг в каждой точке из $(P\psi)^{-1}(\delta)$. Можно найти диффеоморфизм η_0: $N \to N$, для которого $\eta_0([x, y]) = [x, y-\delta]$ при всех x, $y \in W$ (мы считаем, что окрестность W содержится в координатной окрестности W', поэтому $[x, y-\delta] \in W'$) и который гладко переходит в тождественное отображение вне W. Тогда $(P\eta_0\psi)^{-1}(0) = (P\psi)^{-1}(\delta)$, и лемма доказана.

Замечание. Если в лемме о шевелении взять в качестве N не настоящее многообразие, а относительное многообразие по модулю какого-нибудь замкнутого подмножества A, и если $V \subseteq N - A$, то все равно множество диффеоморфизмов η: $(N, A) \to (N, A)$, совпадающих с тождественным отображением в некоторой окрестности множества A и таких, что композиция $\eta\psi$ трансверсальна к V, будет превалентным открытым множеством.

Доказательство этого утверждения по существу не отличается от доказательства самой леммы.

Лемма 4. *Любое компактное многообразие N^n вкладывается в евклидово пространство E^k достаточно большой размерности k.*

Доказательство. Многообразие N можно покрыть координатными окрестностями U_α так, чтобы для каждого α существовали такие координатные окрестности V_α и W_α, что $U_\alpha \subseteq \bar{U}_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \bar{V}_\alpha \subseteq W_\alpha$. В силу компактности N можно считать число окрестностей U_α конечным, скажем, $N \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_{\alpha_i}$. Можно также предполагать, что ни один из n-мерных шаров, гомеоморфных координатным окрестностям U_{α_j}, $j = 1, \ldots, l$, и задающих на них координаты, не содержит начала координат.

Пусть f_α: $N^n \to E^n$ — вектор-функция класса C^∞, для которой

$$f_\alpha(p) = \begin{cases} \text{координатный вектор точки } p \text{ в } U_\alpha, & \text{если } p \in U_\alpha, \\ 0, & \text{если } p \in N - V_\alpha, \end{cases}$$

а g_α — такая вектор-функция класса C^∞, что

$$g_\alpha(p) = \begin{cases} \text{координатный вектор точки } p \text{ в } V_\alpha, & \text{если } p \in V_\alpha, \\ 0, & \text{если } p \in N - W_\alpha. \end{cases}$$

Зададим $F\colon N^n \to E^{2nl}$ равенством

$$F(p) = \left[f_{\alpha_1}(p), \ldots, f_{\alpha_l}(p), g_{\alpha_1}(p), \ldots, g_{\alpha_l}(p)\right].$$

Отображение F взаимно однозначно. В самом деле, пусть $F(p) = F(q)$. Если $p \in U_{\alpha_j}$, то $f_{\alpha_j}(p) \neq 0$, а потому и $f_{\alpha_j}(q) \neq 0$. По определению f_α это означает, что $p, q \in V_\alpha$. Далее, $g_{\alpha_i}(p) = g_{\alpha_i}(q)$, $i = 1, \ldots, l$. По определению $g_{\alpha_j}(p)$ — координатный вектор точки p в V_{α_j}, а $g_{\alpha_j}(q)$ — координатный вектор точки q в V_{α_j}. Но тогда p_i совпадает с q_i, и F взаимно однозначно.

Так как F и F^{-1} принадлежат классу C^∞, то F — диффеоморфное вложение многообразия N^n в E^k, где $k = 2nl$ [1]).

Следствие. *На любом компактном многообразии можно задать риманову метрику.* (Позднее мы поговорим подробнее о римановой геометрии.)

Замечание. Лемма 4 представляет собой частный случай более общего результата, называемого теоремой Уитни о вложении: для произвольного N^n (не обязательно компактного) существует такое вложение $\tau\colon N^n \to E^{2n+1}$, что множество $\tau(N)$ замкнуто в E^{2n+1} (см., например, Де Рам [1] [2])).

Лемма 5. *Если N^n — гладкое многообразие, вложенное в E^k, то существуют трубчатая окрестность U*

---

[1]) Если взять в качестве $f_\alpha(p)$ функцию, равную 1 на U_α и 0 на $N - V_\alpha$, то получим вложение в E^k, где $k = n(l+1)$. — *Прим. перев.*

[2]) См. также Понтрягин [3]. — *Прим. перев.*

многообразия N^n *в* E^k *и отображение* $\rho\colon U \to N^n$, *являющееся гладкой ретракцией* U *на* N^n.

Доказательство. Рассмотрим многообразие Σ^k, состоящее из пар $\sigma = [a, b]$, где $a \in N^n$, а b — вектор в E^k, ортогональный в своем основании к N. Ясно, что отображение $f\colon \Sigma^k \to E^k$, заданное равенством $f[a, b] = a + b$, гладкое и в каждой точке σ множества Σ_0, на котором b имеет нулевую длину, его якобиан отличен от нуля. По теореме о неявной функции существует окрестность U множества Σ_0, на которой отображение $f\colon U \to E^k$ гладко, взаимно однозначно и отображает U на открытое множество V в E^k, причем обратное отображение f^{-1} множества V также гладко по теореме о неявной функции. Положим $g[a, b] = a$, тогда $\rho = g \circ f^{-1}$ удовлетворяет условию леммы.

Лемма 6 (о гомотопии). *Пусть* M^m *и* N^n — *компактные многообразия,* $\eta_1, \eta_2\colon M \to N$ — *гладкие отображения, а* d — *метрика на многообразии* N, *вложенном в некоторое евклидово пространство* E^k (см. лемму 4). *Тогда найдется такое* $\varepsilon > 0$, *что если* $d(\eta_1(p), \eta_2(p)) < \varepsilon$ *для всех* $p \in M$, *то* η_1 *и* η_2 *гомотопны.*

Доказательство. Рассматривая N как подмногообразие евклидова пространства E^k, возьмем его трубчатую окрестность U, существование которой гарантирует лемма 5. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $t\eta_1(p) + (1 - t)\eta_2(p) \in U$ для всех $p \in M$, $t \in [0, 1]$. Положим $\rho_t(p) = \rho(t\eta_1(p) + (1 - t)\eta_2(p))$, где ρ — ретракция U на N. Очевидно, что ρ_t и есть нужная гомотопия между η_1 и η_2.

Лемма 7 (об аппроксимации). *Пусть* M^m *и* N^n — *компактные многообразия,* $f\colon M^m \to N^n$ — *непрерывное отображение. Тогда для любого (наперед заданного)* $\varepsilon > 0$ *найдется такое гладкое отображение* $\varphi_\varepsilon\colon M \to N$, *что* $d(f(m), \varphi_\varepsilon(m)) < \varepsilon$ *для всех* $m \in M$.

Доказательство этой леммы не трудно, оно использует лемму 5 и обычную теорему Вейерштрасса об аппроксимации. Мы опускаем это доказательство и отсылаем читателя к статье Понтрягина [3].

Определение 2. Пусть M^m и N^n — компактные многообразия, $\varphi\colon M \to N$ — непрерывное отображение. Возьмем произвольную точку $p \in N$. По лемме 7 найдется последовательность $\{\varphi_j\}$ гладких отображений, для которых $d(\varphi(m), \varphi_j(m)) < 1/j$. По лемме о шевелении можно считать отображения φ_j трансверсальными к $\{p\}$ для всех j. По лемме о гомотопии найдется такое целое число A, что φ_k и φ_l гомотопны при $k, l \geqslant A$. Отсюда, согласно следствию из леммы о шевелении, четность числа точек в $\varphi_k^{-1}(p)$ совпадает с четностью числа точек в $\varphi_l^{-1}(p)$ (для $k, l \geqslant A$). Обозначим это число через $\deg_2 \varphi|_p$.

Теорема 1′. $\deg_2(\varphi)|_p$ *является гомотопическим инвариантом.*

Теорема 1′. А. $\deg(\varphi)|_p$ *является гомотопическим инвариантом отображений ориентированных многообразий.*

Теория пересечений по модулю 2

Напомним сначала несколько определений из сингулярной теории гомологий.

Сингулярным n-кубом в пространстве X называется отображение $\sigma\colon I^n \to X$ ($I^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$). Если $n = 0$, то σ — единственная точка в X. Если $n > 1$, то сингулярные $(n-1)$-кубы

$$(\lambda_i^\varepsilon \sigma)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sigma(x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \ldots, x_{n-1}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad \varepsilon = 0, 1, \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I^{n-1},$$

называются i-й нижней $(\lambda_i^0\sigma)$ и i-й верхней $(\lambda_i^1\sigma)$ гранями n-куба σ. Очевидно, что $\lambda_i^\varepsilon \lambda_j^\eta = \lambda_{j-1}^\eta \lambda_i^\varepsilon$, где $i < j$ и ε, η равны 0 или 1.

Обозначим через $Q_n(X)$ свободную абелеву группу [1]), образованную всеми сингулярными n-кубами

[1]) Группа $Q_n(X)$ называется группой сингулярных (целочисленных) n-цепей. Формально цепь можно записать в виде линейной комбинации сингулярных кубов с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. — *Прим. ред.*

в X при $n \geqslant 0$, и положим $Q_n(X) = 0$ для $n < 0$. Тогда операция

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\lambda_i^1\sigma - \lambda_i^0\sigma)$$

определяет гомоморфизм $\partial\colon Q_n(X) \to Q_{n-1}(X)$ для каждого n. Непосредственно проверяется, что $\partial\partial = 0$.

Каждому сингулярному $(n-1)$-кубу σ в X, $n > 0$, сопоставим сингулярный n-куб $D\sigma$ в X:

$$(D\sigma)(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sigma(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Сингулярный n-куб V в X называется *вырожденным,* если $V = D\sigma$ для некоторого σ. Другими словами, V вырожден тогда и только тогда, когда он не зависит от последней координаты x_n точки $(x_1, \ldots, x_n)$ в I^n. Вырожденные сингулярные n-кубы в X, $n > 0$, образуют подгруппу $D_n(X)$ группы $Q_n(X)$. Так как $\lambda_i^\varepsilon D = D\lambda_i^\varepsilon$, $i < n$, $\lambda_n^\varepsilon D = 1$, то

$$\partial D\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\lambda_i^1 D\sigma - \lambda_i^0 D\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (D\lambda_i^1\sigma - D\lambda_i^0\sigma),$$

и, следовательно, ∂ переводит $D_n(X)$ в $D_{n-1}(X)$.

Для каждого целого n факторгруппа $C_n(X) = Q_n(X)/D_n(X)$, очевидно, будет свободной абелевой группой. Она называется *группой нормализованных кубических сингулярных n-цепей* в X. Поскольку оператор ∂ переводит $D_n(X)$ в $D_{n-1}(X)$, он индуцирует гомоморфизм

$$\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

для каждого n. Так как $\partial\partial = 0$, то можно определить сингулярные циклы и сингулярные границы так же, как и в симплициальной теории гомологий[1]). Аналогично можно определить группу $H_n(X, G)$ сингу-

[1]) Группа сингулярных n-циклов определяется как ядро $\ker\partial$ гомоморфизма $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, а группа n-границ — как образ $\operatorname{Im}\partial$ гомоморфизма $\partial\colon C_{n+1}(X) \to C_n(X)$. Так как $\operatorname{Im}\partial \subset \ker\partial$ в силу $\partial\partial = 0$, то можно говорить о факторгруппе $\ker\partial/\operatorname{Im}\partial = H_n(X)$. — *Прим. перев.*

лярных гомологий с коэффициентами в произвольной абелевой группе G.

Пусть (M^m, A) — относительное многообразие, $V^v \subseteq M$ — подмногообразие и $V \cap A = \varnothing$. Говорят, что n-цепь $\sum k_\sigma \sigma$ имеет своим носителем A, и пишут $\sum k_\sigma \sigma \subseteq A$, если $\sigma(I^n) \subseteq A$ для всех σ. Сингулярная n-цепь α называется *циклом по модулю* A, если $\partial\alpha \subseteq A$.

Пусть $\alpha = \sum k_\sigma \sigma$. Тогда существует такой диффеоморфизм η на M, сколь угодно близкий к тождественному отображению, что вблизи A он совпадает с тождественным отображением, композиция $\eta\sigma$ трансверсальна к V для каждого σ, а ее сужение на любую грань куба I^n трансверсально к V. Это сразу следует из замечания на стр. 42.

Определение 3. Пусть $m - v = k$ (m, v те же, что и выше). Пусть α будет k-циклом в M по модулю A, $\alpha = \sum k_\sigma \sigma$. Мы хотим определить $\alpha \cdot V$, т. е. *индекс пересечения* α с V (mod 2).

Возьмем, как и раньше, диффеоморфизм η, достаточно близкий к тождественному отображению. Прежде всего заметим, что граница куба I^k не содержит точек x, для которых $\eta\sigma(x) \in V$. В самом деле, если бы такая точка существовала, то очевидное неравенство dim (грани) $< k = \operatorname{codim} V$ противоречило бы свойству a) трансверсальных отображений (стр. 31).

В силу свойства b) множество точек x, для которых $\eta\sigma(x) \in V$, изолированное. Но поскольку I^k — компакт, таких точек может быть только конечное число. Обозначим четность этого числа через $\#(\sigma)$ и положим $\sigma \cdot V = \#(\sigma)$, $\alpha \cdot V = \sum k_\sigma(\#(\sigma))$[1].

Легко видеть, что индекс пересечения $\alpha \cdot V$ не зависит от η. Если $\alpha = \sum k_\sigma \sigma$, то по определению $\eta\alpha = \sum k_\sigma \cdot \eta\sigma$. Пусть η' — другой диффеоморфизм, обладающий теми же свойствами, что и η. По лемме

[1] Для того чтобы это определение имело смысл, выражения $k_\sigma(\#(\sigma))$ (никак не определяемые автором) должны лежать в $\mathbb{Z}_2$. Для этого необходимо фиксировать некоторый гомоморфизм G в $\mathbb{Z}_2$. В наиболее важных случаях $G = \mathbb{Z}$ и $G = \mathbb{Z}_2$ это можно сделать очевидным образом. — *Прим. ред.*

о гомотопии η и η' гомотопны. Тогда $\eta\alpha$ и $\eta'\alpha$ *гомологичны* $(\operatorname{mod} A)$, т. е. $\eta\alpha - \eta'\alpha = \partial\beta + \gamma$, где $\gamma \in A$, а β есть $(k+1)$-мерная сингулярная цепь. В самом деле, пусть η_t — гомотопия между η, η', т. е. $\eta_0 = \eta$, $\eta_1 = \eta'$. Положим $\beta = \sum k_\sigma \cdot \hat{\sigma}$, где $\hat{\sigma}(t, x) = \eta_t \cdot \sigma(x)$. Нетрудно показать, что $\eta\alpha - \eta'\alpha - \partial\beta \subseteq A$.

Лемма 8. *Если цикл α гомологичен нулю* $(\operatorname{mod} A)$, *то* $\alpha \cdot V = 0$, *т. е. если* $\alpha = \sum k_\sigma \sigma = \partial\beta + \gamma$, $\gamma \subseteq A$, *то* $\sum k_\sigma \cdot \#(\sigma) = 0$.

Доказательство. Гладко пошевелим M так, чтобы сделать все сингулярные кубы цепей α, β, γ трансверсальными к V. Мы видели, что это шевеление не изменяет индекса пересечения α с V. Тогда сингулярные кубы цепи γ лежат на A и поэтому отделены от V. Если $\beta = \sum l_\tau \tau$, то $\partial\beta = \sum l_\tau \partial\tau$. Для каждого куба τ число точек x в ∂I^{k+1}, для которых $\tau(x) \in V$, четно. В самом деле, $\tau^{-1}(V)$ — одномерное многообразие с краем и все его граничные точки содержатся в ∂I^{k+1}. Таким образом, $\tau^{-1}(V)$ — множество дуг и окружностей (см. лемму 8 гл. I); следовательно, множество $\{x \in \partial I^{k+1} \mid \tau(x) \in V\}$ всех концевых точек четно.

Следствие. $\alpha \cdot V$ *зависит только от класса гомологий* $\{\alpha\}$ *цикла* α, *и поэтому можно определить* $\{\alpha\} \cdot V = \alpha \cdot V$.

Следствие. $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot V = \alpha_1 \cdot V + \alpha_2 \cdot V$, *т. е.* $\{\alpha\} \cdot V$ *линейно по* $\{\alpha\}$.

Пусть $\sigma\colon I^k \to M$, $\sigma'\colon I^l \to M'$. Зададим отображение

$$\sigma \times \sigma'\colon I^k \times I^l = I^{k+l} \to M \times M'$$

равенством

$$\sigma \times \sigma'(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) = \\ = [\sigma(x_1, \ldots, x_k), \sigma'(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})].$$

Если $\alpha = \sum k_\sigma \cdot \sigma$, $\alpha' = \sum l_{\sigma'} \cdot \sigma'$, положим $\alpha \times \alpha' = \sum k_\sigma l_{\sigma'} (\sigma \times \sigma')$. Проверку формулы

$$\partial(\alpha \times \alpha') = (\partial\alpha) \times \alpha' + (-1)^k \alpha \times (\partial\alpha'),$$

где ∂ — граничный оператор, определенный на стр. 46, предоставляем читателю.

Пусть $(M,\ A)$ и $(M',\ A')$ — относительные многообразия, α — цикл в $M \pmod A$ и α' — цикл в $M' \pmod{A'}$. Легко показать, что

1) $\alpha \times \alpha'$ — цикл в $M \times M' \pmod{(M \times A') \cup (M' \times A)}$,

2) если α — граница в $M \pmod A$ или α' — граница в $M' \pmod{A'}$, то $\alpha \times \alpha'$ — граница в $M \times M'$ $\pmod{(M \times A') \cup (M' \times A)}$ (заметим, что $(\alpha + \beta) \times \alpha' = \alpha \times \alpha' + \beta \times \alpha'$).

Из этих утверждений следует, что соответствие $[\alpha,\ \alpha'] \to \alpha \times \alpha'$ индуцирует отображение

$$H_k(M,\ A) \times H_l(M',\ A') \to \\ \to H_{k+l}(M \times M', (M \times A') \cup (M' \times A)).$$

Предположим теперь, что оба многообразия M, M' содержатся в (абсолютном) многообразии M_0, причем M, M' и M_0 имеют одну и ту же размерность m и $A \cap M' = A' \cap M = \varnothing$. Наконец, обозначим через N множество $\operatorname{diag} M_0 = \{[x,\ x] \mid x \in M_0\}$. Ясно, что N будет также m-мерным многообразием. Пусть α — цикл в $M \pmod A$, α' — цикл в $M' \pmod{A'}$. Тогда $\alpha \times \alpha'$ — цикл в $M \times M' \pmod{(M \times A') \cup (M' \times A)}$. Так как $N \cap \{(M \times A') \cup (M' \times A)\} = \varnothing$, то можно определить индекс пересечения $\{\alpha \times \alpha'\} \cdot N$ в случае, когда $\dim \alpha + \dim \alpha' = k + l = m$, ибо коразмерность N в M_0 равна $2m - m = m$.

Определение 4. *Индексом пересечения* $\{\alpha\} \cdot \{\alpha'\}$ двух классов гомологий $\{\alpha\}$, $\{\alpha'\} \pmod 2$ назовем число $\{\alpha \times \alpha'\} \cdot N$.

Лемма 9. a) *Индекс пересечения корректно определен для классов гомологий* $\{\alpha\} \in H_k(M_1,\ A)$ *и* $\{\alpha'\} \in H_l(M_2,\ A')$, *если* $k + l = m$;

b) *билинеен по* $\{\alpha\}$, $\{\alpha'\}$;

c) $\gamma \cdot \gamma' = \gamma' \cdot \gamma$, *где* $\gamma = \{\alpha\}$, $\gamma' = \{\alpha'\}$.

Доказательство. (a) Класс гомологий цикла $\alpha \times \alpha'$ зависит только от классов гомологий циклов α и α', следовательно, $\gamma \cdot \gamma'$ не зависит от выбора представителей α, α'.

(b) Очевидно.

(c) Рассмотрим диффеоморфизм ρ многообразия $M \times M$, переводящий $[m_1, m_2]$ в $[m_2, m_1]$, и гомеоморфизм $\rho_{k,l}$ пары $(I^{k+l}, \partial I^{k+l})$ на себя, заданный соответствием

$$[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}] \to [x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}, x_1, \ldots, x_k].$$

Заметим, что гомеоморфизм $\rho_{k,l}$ гомотопен (как отображение пары $(I^{k+l}, \partial I^{k+l})$) тождественному отображению, если kl четно, и отображению $[x_1, \ldots, x_{k+l}] \to [1 - x_1, x_2, \ldots, x_{k+l}]$, если kl нечетно. Если $\beta = \sum n_\sigma \sigma$ есть $(k+l)$-мерный цикл, то $\sum n_\sigma (\sigma \cdot \alpha_{k,l})$ принадлежит тому же классу гомологий, что и $(-1)^{kl}\beta$. Ясно, что если $\tau\colon I^k \to M$, $\tau\colon I^l \to M$, то $\rho(\sigma \times \tau) = (\tau + \sigma)\alpha_{k,l}$. Тем самым для k- и l-мерных классов гомологий $\delta_*(\gamma \times \gamma') = (-1)^{kl}(\gamma' \times \gamma)$. Так как множество $N = \operatorname{diag}(M \times M)$ инвариантно относительно отображения ρ, то $(\gamma \times \gamma') \cdot N = (-1)^k (\gamma' \times \gamma) \cdot N$. Приводя полученное равенство по модулю 2, получаем (c).

З а м е ч а н и е. Если многообразия ориентированы, то можно, как и в теории степени отображения, обобщить теорию пересечений по модулю 2 до целочисленной теории (см. определение 1. А на стр. 36. — *Перев.*). Тогда

1) $\alpha \cdot \beta = (-1)^{kl} \beta \cdot \alpha$, где $k = \dim \alpha$, $l = \dim \beta$;

2) если ε и η — такие цепи, что $\dim \varepsilon + \dim \eta = \dim M_0 + 1$, и если $\partial\varepsilon \cap \partial\eta = \varnothing$, то $\partial\varepsilon \cdot \eta = (-1)^l \varepsilon \cdot \partial\eta$, где $l = \dim \varepsilon$.

Доказательство оставляем читателю.

Л е м м а 10. *Пусть α и α' имеют размерности k и l соответственно и $k + l = m$. Пусть в каждой точке p пересечение сингулярного куба σ из α с сингулярным кубом σ' из α' „трансверсально“, т. е. $\sigma_*(T_{p_1}(I^k)) + \sigma'_*(T_{p_2}(I^l)) = T_p(M)$, где $p_1 \in \sigma^{-1}(p)$, $p_2 \in \sigma'^{-1}(p)$, а σ_*, σ'_* — отображения касательных пространств, индуцированные отображениями σ, σ'. Тогда $\alpha \cdot \alpha'$ равно четности числа пересечений всех сингулярных кубов из α со всеми сингулярными кубами из α'.*